

COUP D'ŒIL SUR LA MATHÉMATIQUE ÉGYPTIENNE.

Sir Eric Peet vient d'éditer avec luxe le Papyrus de Rhind ¹. Le vigoureux effort critique de cette édition ne le cède en rien à son luxe. Une reconstitution de texte, prudente, et qui profite de tout ce que l'érudition nous a apporté depuis l'édition d'Eisenlohr et les travaux qu'elle a provoqués, une traduction sagace, un commentaire judicieux qui relèvent, grâce à une réflexion attentive et logique, quelques erreurs qui faisaient loi depuis Eisenlohr, voilà ce que nous trouvons au cours de ces 32 pages d'introduction (p. 1-33) et des 100 pages qui contiennent traduction et commentaires (p. 34-135). Les 25 planches qui terminent le volume (A à Y) nous donnent le fac-similé du papyrus.

Nous voudrions, en marquant ce que cette édition nous apporte de nouveau, essayer de jeter un coup d'œil d'ensemble sur la mathématique égyptienne et prendre une idée de sa nature et de son contenu.

I. LES ORIGINES.

Bien que quelques historiens aient été tentés de faire remonter la formation des mathématiques égyptiennes au Haut-Empire « âge d'or de la sagesse égyptienne », nous n'avons pas de documents certains et probants d'une certaine ampleur avant le Moyen-Empire et les débuts du deuxième millénaire avant J.-C. Il est vrai que les documents de cette dernière période marquent

1. *The Rhind Mathematical Papyrus*. The University Press of Liverpool. Hodder and Stoughton London, 1923. 1 vol. in folio, 135 pages, 25 planches.

un état déjà fort compliqué de la manipulation arithmétique, si l'on peut dire. Les insuffisances théoriques des moyens de calcul notamment entraînent des procédés pratiques, des « tables » étendues et assez pénibles qui ont dû nécessiter une longue et lente élaboration.

On peut affirmer cependant que le système de numération avec tous ses signes allait jusqu'au million au commencement de la I^{re} dynastie, sous le règne de Narmer¹ ou immédiatement avant. La tombe de Methen (IV^e dynastie) nous révèle des mensurations de terrains obtenues de même façon que dans le papyrus de Rhind, et l'aire du rectangle y est donnée correctement. La grande unité de mesure des aires, l'*hekat*, avec ses sous-multiples dichotomiques, est déjà mentionnée dans un papyrus de la VI^e dynastie². Peut-être avait-on déjà établi des unités de poids.

Mais en dehors de ces indices, nous n'avons rien qui nous permette de retracer l'histoire des origines de la science mathématique jusqu'à la XII^e dynastie, où nous rencontrons alors des documents capitaux, et une technique bien fixée.

II. LES DOCUMENTS.

Ces documents sont le papyrus de Moscou et les papyrus très fragmentaires de Kahun et de Berlin. A la XII^e dynastie encore remonte l'original dont le papyrus de Rhind est une copie. Nous avons là en somme l'ensemble des éléments qui nous permettent de reconstruire la mathématique égyptienne antérieure à toute influence grecque. Elle nous paraît d'ailleurs, par la concordance du contenu de ces éléments, présenter une tradition désormais assise et bien déterminée. Nous pourrions l'appeler la mathématique du Moyen-Empire.

Elle se situe d'après les travaux récents à la fin du troisième — ou au commencement du second — millénaire avant J.-C. Heath³ fait remonter Amenemhet à 2300. Le règne d'Ame-

1. QUIBELL, *Hieraconpolis I*, pl. XXVI, B. Cf. PEET, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 9.

2. *Zeitschrift für ägyptische Sprache*, 48, 100. Cf. PEET, *id.*

3. J.-C. HEATH, *A History of Greek Mathematics*, vol. I, p. 122.

nemhet III auquel appartient, d'après son copiste lui-même, l'original dont le papyrus de Rhind est la reproduction, devrait alors être placé vers 2200. Les derniers résultats de la critique le font descendre de quatre siècles et le datent de 1849 à 1801¹.

III. LE PAPIRUS DE RHIND ET LE THÉORÈME DE PYTHAGORE.

Les fragments du *papyrus de Kahun* posent une question préjudicielle dont il faut d'abord nous débarrasser, parce que croyons-nous, elle a été soulevée d'une façon arbitraire et a tenu une très grande place jusqu'ici dans l'histoire des sciences. Elle est relative au théorème de Pythagore. Un fragment contient en effet une table de quatre carrés présentés chacun comme somme de deux autres carrés. Et ces quatre égalités sont obtenues, deux par duplication des nombres 3, 4 et 5 ($6^2 + 8^2 = 10^2$ et $16^2 + 12^2 = 20^2$) et les deux autres par division par 2 de ces mêmes nombres : $\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1 = \left(1\frac{1}{4}\right)^2$ et $\left(1\frac{1}{2}\right)^2 + 2^2 = \left(2\frac{1}{2}\right)^2$. Ce pourrait donc être les carrés des dimensions des côtés des triangles rectangles proportionnels au triangle rectangle de côtés 3, 4 et 5. Pour Cantor², — et il a été suivi d'une façon traditionnelle par les historiens postérieurs, notamment G. Milhaud et J.-C. Heath³, — nous serions en face d'une connaissance de quelques cas particuliers du célèbre théorème de Pythagore. Aurait-il été d'abord connu dans sa généralité? Il ne le semble pas, puisque nous n'avons ici que des multiples et sous-multiples d'un triangle rectangle particulier, — le premier connu sans doute et le plus simple, — que nous retrouvons dans les Indes et en Chine. Si ce triangle n'est pas mentionné dans le papyrus, c'est, dit-on, qu'il était si connu qu'on n'a pas jugé utile de le faire : on a mentionné seulement les résultats de la double duplication et de la double division par 2 opérées sur lui et qui apportaient quelque chose de moins connu ou de nouveau.

Cantor avait conclu de certaines scènes représentées sur les

1. PEET, *id.*, p. 3.

2. CANTOR, *Vorlesungen*, t. I, p. 75.

3. G. MILHAUD, *Nouvelles Etudes sur la pensée scientifique*, p. 68. — J.-C. HEATH, *A History of Greek Mathematics*, I, 122.

monuments égyptiens et qui nous montrent le roi tenant à la main des piquets et une corde, qu'il y s'agissait de l'orientation de la construction des temples, grâce à la propriété connue du triangle rectangle de côtés 3, 4 et 5. Il évoque à ce sujet le mot que Démocrite emploie pour désigner les géomètres égyptiens : harpédonaptes, traduits en général par « tendeurs de corde »

Mais pour l'orientation et la construction du temple, c'est-à-dire pour tracer des perpendiculaires sur le terrain, il n'est pas besoin de recourir à ce triangle. Il suffisait, fait remarquer Milhaud, de tendre avec la corde deux obliques égales à partir de la droite sur laquelle on veut élever la perpendiculaire, et de joindre le point d'intersection de ces deux obliques au milieu de cette droite, construction qu'effectuent encore nos jardiniers, nos charpentiers et nos maçons pour le même objet. Il semble que le triangle rectangle (l'équerre) a dû compléter plus tardivement le premier procédé, et surtout servir aux élévations sur le terrain. Il était particulièrement précieux pour préciser métriquement les rapports de certaines parties de la construction à l'ensemble, ou pour assurer la perpendicularité exacte à la direction du fil à plomb dans l'espace, c'est-à-dire pour construire des plans horizontaux parallèles à la base, mais à une hauteur donnée. C'est du moins à quoi nous le voyons servir généralement dans les *culvaçutras* hindous. Il a dû sans doute être d'abord employé en astronomie pour la détermination de la hauteur des astres au-dessus de l'horizon, et de l'heure. Nous verrons qu'en Chine, c'est à des mesures astronomiques qu'est d'abord utilisé le caractère rectangle du triangle 3, 4 et 5.

Il y a plus. Il semble bien que la représentation picturale à laquelle fait allusion Cantor se rapporte à quelque chose de beaucoup plus simple : l'orientation Nord-Sud de tous les temples. Le roi ou le prêtre, pour y procéder, visait la polaire à travers un bâton fendu. En face de lui se tenait un aide avec un fil à plomb suspendu à un manche de bois et qu'il plaçait dans la ligne de visée. Il ne restait plus qu'à *tendre un cordeau* entre les marques faites sur le terrain, et grâce auxquelles les deux opérateurs repéraient la situation du fil à plomb et celle du bâton fendu. On avait ainsi la direction exacte du méridien Nord-Sud ¹.

1. BORCHARDT, *Zeitschrift für ägyptische Sprache*, 37, 10 sq. — PEET, *The Rhind Mathematical Papyrus*, p. 132.

De tout cela, il semble bien difficile de conclure autrement qu'avec une hypothèse très hardie, puisque rien ne la justifie, qu'il s'agissait de quelque propriété du triangle rectangle en relation avec le théorème de Pythagore. Il semble plutôt que nous ayons à faire à des multiplications ou des divisions de nombre et de fractions, qui constituent la presque totalité du contenu du papyrus de Kahun, et de deux observations qui témoignent d'ailleurs d'un esprit de comparaison mathématique déjà remarquable. La première, c'est qu'un carré est la somme de deux autres ; la seconde, qu'en divisant ou en multipliant les racines de ces carrés, on obtient des nombres qui ont entre eux la même relation. A notre sens, et à nous en tenir d'une façon stricte aux documents que nous avons (et procéder autrement, c'est ouvrir la porte à tous les arbitraires), il s'agirait donc avec bien plus de vraisemblance d'une propriété arithmétique que d'une propriété géométrique.

Car, dans aucun autre fragment mathématique égyptien, et en particulier dans le papyrus de Rhind qui est le traité le plus ample de mathématique égyptienne qui nous soit parvenu et qui enferme quelques problèmes géométriques, il n'est question de près ou de loin de données relatives au théorème de Pythagore. Le papyrus de Kahun lui-même ne contient rien d'autre qui y puisse faire songer. Il est surtout, arithmétique à part, deux problèmes relatifs à des mesures de capacité.

Nous y trouvons en fait de manuel opératoire :

Une table de résolution des fractions dont le dénominateur est impair et compris entre 3 et 21, dont le numérateur est 2, en somme des fractions dont le numérateur est l'unité ;

La multiplication de $\frac{1}{3} + \frac{1}{12}$ par 9 ;

La division de 10 par 8, le résultat étant exprimé par un nombre fractionnaire $13 \frac{2}{3} + \frac{1}{12}$; l'expression fractionnaire $\frac{2}{3} + \frac{1}{6}$ est ensuite soustraite neuf fois de suite de ce résultat.

Enfin un problème très simple qui revient à la solution de l'équation $\frac{x}{2} - \frac{x}{4} = 5$.

Il s'agit ici d'opérations arithmétiques assez simples, qui

nous montrent clairement qu'on ne maniait jamais de fractions dont le numérateur était supérieur à l'unité (à l'exception de $\frac{2}{3}$) et qu'on ne savait pas diviser autrement que par soustractions successives.

Des deux problèmes relatifs aux mesures de capacité, l'un consiste à déterminer celle d'un récipient cylindrique de 12 cou-dées de diamètre et de 8 de hauteur. L'autre est plus confus; le texte n'est pas complet: il s'agit de déterminer la contenance en *henu* (mesure de capacité de 29,2 pouces cubiques) de récipients de forme parallépipédique dont les côtés de base sont dans un rapport donné. Il est donc plus nettement géométrique. Sa solution implique l'emploi de la racine carrée. Et c'est dans la solution de ce problème que nous trouvons la table des carrés qui rappellent le théorème de Pythagore.

Maintenant, nous savons que la propriété du triangle 3, 4 et 5 a été connue d'assez bonne heure en Orient. Il semble impossible, étant données les relations du monde oriental, notamment de l'Orient proche avec l'Égypte, qu'il n'en ait pas transpiré quelque chose en Égypte. N'oublions pas, non plus, qu'Aristote attribue formellement l'étendue des connaissances scientifiques des Égyptiens à la forte organisation d'un groupement sacerdotal qui avait des loisirs et qui employait ces loisirs à des travaux intellectuels en quelque sorte désintéressés. Nul doute qu'avec les connaissances mêmes dont font preuve les documents qui nous sont parvenus, les prêtres égyptiens ne fussent capables de retenir, voire de découvrir, l'intérêt du triangle rectangle à côtés 3, 4 et 5, et d'en tirer certaines conséquences. Mais la vérité, c'est que dans ces mêmes documents, aucune allusion n'est faite à cette propriété géométrique, dont l'importance a été, comme on verra, considérable dans les développements ultérieurs de la mathématique et de la science. La vérité est encore qu'avec les papyrus de Kahun, de Moscou, de Berlin et de Rhind, nous sommes en pleine XII^e dynastie, c'est-à-dire, **au début** du deuxième millénaire. Or, nous ne pouvons guère dater les mentions orientales du triangle rectangle (3, 4 et 5), au delà du premier millénaire, ou au plus tôt des derniers siècles du second. Rien n'autorise donc l'inférence hardie de Cantor et de Heath sur l'interprétation donnée à la table des

carrés relative à la solution d'un problème d'ordre tout différent : la mesure de la capacité d'un récipient d'une certaine forme géométrique en fonction de ses côtés.

Ce que nous possédons du papyrus de Kahun ne contient donc, si nous ne voulons pas dépasser ce que nous y lisons, que des opérations arithmétiques concrètes de multiplication, de division et de réduction de fractions de numérateur 2 et de dénominateurs impairs à des sommes de fractions ayant toutes l'unité pour numérateur, — puis la résolution d'une équation très simple qui consiste à trouver, étant donnée la valeur de la différence de deux fractions d'un nombre, ce nombre lui-même, — enfin deux problèmes arithmético-géométriques relatifs aux mesures de capacité.

IV. LES PAPYRUS DE MOSCÔU, DE BERLIN ET DE RHIND.

Le *papyrus de Moscou* ne contient rien non plus qui soit relatif au triangle rectangle et au théorème de Pythagore. Il traite pourtant de problèmes géométriques plus complexes. Mais ces problèmes ne montrent aucun souci d'organisation rationnelle de la mathématique. N'oublions pas que tout le premier livre des *Éléments* d'Euclide nous achemine à la démonstration générale du théorème de Pythagore qui en est comme le couronnement, et que la tradition pythagoricienne avait dès la fin du ^{ve} siècle rassemblé le contenu général des *Éléments*¹, et avait été forcée de le mettre en un certain ordre ; la méthode démonstrative l'implique absolument. Les cinq problèmes géométriques résolus dans le papyrus de Moscou sont des solutions concrètes de propositions isolées, utiles chacune à un point de vue pratique particulier, mais sans lien entre elles. Nous y trouvons la détermination correcte du volume d'une pyramide tronquée à base carrée, la détermination correcte également de la longueur des côtés d'un quadrilatère quand nous connaissons la relation de ces côtés à l'aire du quadrilatère. Deux autres problèmes sont relatifs à l'aire du triangle, d'après la méthode que nous discuterons plus tard. Quatorze autres problèmes

1. C'est ce que montre très bien Paul TANNERY, au cours de son ouvrage la *Géométrie grecque*, notamment ch. VI et VII.

ont trait au calcul arithmétique. Certains sont, paraît-il (le papyrus n'a pas encore été publié dans son intégrité), assez difficiles à suivre et portent sur des procédés de calcul pratique nouveaux par rapport à ceux que nous connaissions déjà par les autres papyrus. Nous restons enfermés dans le même cycle et les mêmes types scientifiques.

Les *fragments de Berlin* ne nous en font certes pas sortir : diviser un carré de 100 coudées carrées en deux carrés dont les côtés soient comme 1 est à $\frac{3}{4}$ (extractions de racines carrées identiques à celles du papyrus de Kahun $1^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(1\frac{1}{4}\right)^2$ où Cantor¹ avait voulu voir une preuve de la connaissance du fameux théorème). Ici, on voit nettement qu'il s'agit d'un problème arithmético-géométrique concret : la division d'une aire en une somme équivalente de deux aires. Un second problème implique la solution correcte de l'extraction de la racine carrée de $6\frac{1}{4}$ à savoir $2\frac{1}{2}$. Le reste est trop fragmentaire.

Ce sont encore des problèmes du même genre que nous présentent les tablettes de bois du musée du Caire qui remontent aussi au Moyen-Empire. Il s'agit d'exprimer le tiers, le septième, le dixième, le onzième et le treizième d'un *hekat* (la grande unité de capacité) avec les sous-multiples usuels de cette mesure : $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$, et $\frac{1}{320}$.

Quelques fragments d'autres papyrus ne nous renseignent que sur les poids et mesures des Égyptiens : les plus importants sont, avec le papyrus de Boulak, des fragments bien postérieurs aux documents que nous venons d'analyser : ils datent du Nouvel-Empire² (Séti I).

Nous arrivons enfin au monument capital de la mathématique égyptienne, le papyrus de Rhind. Il a été écrit, d'après le scribe, le quatrième mois de la saison d'inondation de la trente-troisième année du règne du roi Hyksos Aaoussèr Apophis (entre

1. La solution est un carré à 8 coudées de côté et un carré à 6 coudées :
 $64 + 36 = 100$ et 8 est à $\frac{6}{4}$ comme 1 à 3.

2. SPIEGELBERG, *Rechnungen aus der Zeit Seti I.*

1788 et 1580 avant J.-C.), en copie d'un écrit antique fait du temps du roi Némarté (Amenemmes III de la XII^e dynastie, 1849-1801). Il contient à la fois du calcul, de la métrique, de la géométrie et des problèmes d'arithmétique.

E. Peet le divise en une Introduction, contenant les tables de résolution des fractions dont le numérateur est 2, et en trois livres : arithmétique, mensuration (métrique), problèmes d'arithmétique. Il divise le deuxième livre lui-même en trois parties : volumes et contenances cubiques, aires, angles de pente.

Le premier livre contient la division de nombres divers de pains à rations égales entre 10 hommes, deux groupes de calculs (*s'km*, *sekem* = compléments) impliquant l'un l'addition des fractions, l'autre leur soustraction, la solution arithmétique, par essais, d'équations du premier degré (*han*), la division de pains selon des proportions inégales.

Le livre II établit dans la première partie la capacité de récipients cylindriques, parallélépipédiques rectangulaires, l'expression correcte de $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{20}$, ... jusqu'à $\frac{1}{100}$ de 100 quadruples *hekat* en multiples entiers et sous-multiples usuels de l'*hekat*.

Dans la seconde, nous trouvons une comparaison entre l'aire du cercle et celle du carré, les aires du rectangle, du cercle, du triangle, du triangle tronqué, d'un trapèze (?), la division d'une surface donnée de terre en champs ayant des côtés égaux. Ce problème, quoique beaucoup plus simple (il ne s'agit ici que de divisions de nombres à la première puissance), rappelle celui du papyrus de Berlin où nous avons retrouvé le premier exemple donné par le papyrus de Kahun, d'un carré égal à la somme de deux autres, et que Cantor a prise pour une anticipation particulière du théorème de Pythagore.

La troisième et dernière partie du livre géométrique traite du problème difficile et si controversé de l'angle d'inclinaison d'une pyramide du *se-ket* ($s^{\frac{1}{2}}d$) et d'un problème semblable, peut-être pour le cône (?).

Il s'agit, étant données la hauteur verticale d'une pyramide et une dimension relative à la base de celle-ci, de trouver un angle d'inclinaison. Eisenlohr, suivi par un grand nombre d'historiens, avait cru qu'il s'agissait de déterminer l'angle de l'arête d'une

pyramide sur la diagonale du carré de base. Le *skd* donnait alors le cosinus de cet angle. Or, comme Borchardt¹ l'a fait remarquer, et comme Peet² l'établit, cette mesure ne serait d'aucune utilité pratique. L'angle qu'il s'agit d'établir est celui qui servira au maçon dans la construction de la pyramide pour tailler les pierres qui doivent revêtir la face externe. Et la formule donnée dans le problème, à savoir le rapport de la moitié d'une longueur appartenant à la base à une longueur dépendant de l'élévation de la pyramide, nous donne précisément cet angle, si l'on prend pour ces deux longueurs le côté de la base et la hauteur elle-même. — Ne peut-on pas traduire avec certains égyptologues le mot *prmw*s qui désigne cette hauteur par « la ligne qu'on ne voit pas » ? la hauteur qui ne pourrait être vue que par une section médiane de la pyramide. — Il suffit alors de mesurer une coudée sur l'arête externe de la pierre à tailler à partir de la base, puis de tracer la longueur trouvée à angle droit vers l'intérieur, enfin de joindre le point ainsi atteint au point de départ. C'est la ligne de taille. La solution pratique est ainsi presque immédiate.

Les rapports calculés dans les problèmes du papyrus sont précisément ceux que nous retrouvons dans la pyramide de Dakshūr, dans la seconde pyramide de Gizeh et dans les tombes à mastabas.

Le livre III contient des problèmes de division (pains, orge) selon des proportions inégales, les valeurs proportionnelles des métaux précieux, une division en progression arithmétique, une progression géométrique (de raison 7 avec l'unité pour premier terme), des calculs de conversion de blé en pain ou d'orge en bière, la conversion des fractions usuelles d'*hekat* en *henu* (autre mesure de capacité, de $\frac{1}{10}$ d'*hekat*), la division de rations annuelles en portions journalières, le calcul d'un troupeau entier d'après le nombre de têtes de bétail qui en représentent une fraction connue, le calcul de la nourriture pour une basse-cour, une étable, etc., enfin des fragments de comptes, des fragments intelligibles et des indications de dates sur lesquelles on a discuté pour dater le papyrus lui-même. Petrie voudrait, à

1. *Ägyptische Zeitschrift*, 31, p. 9 sq.

2. *Rh. Math. Pap.*, p. 97.

cause d'elles, le faire remonter aux environs de 2370 avant J.-C., en justifiant ce qu'on pourrait appeler la haute chronologie de l'histoire d'Égypte, celle qui situe le Moyen-Empire dans le troisième millénaire et non dans le premier tiers du second, comme nous l'avons ici adopté à la suite de Peet. Les raisons de Petrie sont loin d'être probantes.

V. DOCUMENTS PLUS RÉCENTS.

Nous possédons encore sur la mathématique égyptienne quatre documents beaucoup plus récents. Le premier, le papyrus démotique, nous fait descendre déjà à la période romaine. Il contient des tables pour résoudre des fractions à numérateurs allant de 1 à 15 (et non plus seulement à 2 comme dans les papyrus précédents), en fractions ayant l'unité pour numérateur.

Les tables byzantines et coptiques nous donnent les résultats de la division, les premières des nombres 1 à 15 par 15 et 1 à 16 par 16, les deuxièmes la division de 1 à 31 par 31 ; les résultats sont énoncés en fractions ayant toujours l'unité pour numérateur.

Enfin le papyrus d'Akhmîm nous donne encore des tables beaucoup plus amples du même genre, et qui dénotent, ce qu'il reste impossible de déceler dans le papyrus de Rhind, des formules, c'est-à-dire des règles fixes, pour réduire une fraction en fractions ayant l'unité pour numérateur. A ces tables s'ajoutent une cinquantaine de problèmes du même genre que ceux que nous avons vus dans les papyrus du Moyen-Empire, avec pourtant l'accent plus marqué sur la technique de la solution.

Le papyrus démotique nous fait déjà descendre à la période romaine ; les autres sont plus récents, évidemment, le dernier de tous, le papyrus d'Akhmîm, se situant entre le ^{vi}e et le ^{ix}e siècle de notre ère. La mathématique égyptienne dans ces papyrus pouvait donc être influencée largement par la mathématique grecque. Pourtant, comme on vient de le voir, nous restons *entièrement* dans la ligne des procédés de calcul du Moyen-Empire : avec plus de systématisation, et des progrès certains à la fois dans l'étendue et la régularité logique des calculs. Mais

les méthodes grecques n'ont pas supplanté — dans la pratique courante du moins — les antiques errements. On continue, bien que depuis des siècles les Grecs aient manié les fractions à la moderne, à ramener le résultat de toute division à des fractions de numérateur 1, à l'exception de $\frac{2}{3}$, et à ne calculer qu'avec ces fractions.

Les documents de très basse époque tendent donc à nous faire croire que ceux de haute époque nous présentent un état fixe et stable de la mathématique égyptienne, à partir duquel il n'y a eu que des progrès de détails, et tout au plus des généralisations, restreintes d'ailleurs, des mêmes procédés méthodologiques.

La mathématique égyptienne aurait conservé sa même allure et, à peu de choses près, un contenu identique.

VI. LE CARACTÈRE GÉNÉRAL DE LA MATHÉMATIQUE ÉGYPTIENNE.

Quel est ce contenu? Et la vue synthétique que nous allons essayer d'en prendre nous met-elle en face d'une science au sens moderne du mot?

Oui et non.

Oui, parce qu'il y a des procédés de calcul qui sont un savoir et un savoir exact, en général; oui encore, parce qu'il y a un ensemble de recherches groupées par affinités naturelles et se rapportant à un même objet; oui enfin — à peu près — parce qu'il y a des essais comme une méthode de preuve.

Non, parce qu'il n'y a encore aucune règle générale, *aucune loi*, aucune théorie dégagées. Nous sommes en face de savoirs particuliers résultant d'essais empiriques — sauf, pour partie, en ce qui concerne les fractions — et qui se rapprochent beaucoup plus de la technique que de la science. En tout cas c'est de la technique purement positive, débarrassée de toute attache religieuse, mythique ou magique. Et si dans la première ligne du papyrus de Rhind nous lisons les mots : « tous les secrets, tous les mystères », ils ne peuvent se rapporter qu'aux secrets de celui qui sait, à la solution d'énigmes qui sont mystères pour l'ignorant, à un hermétisme de la technique peut-être (comme le

secret des émaux pour un Palissy) et non à une attache directe magique ou religieuse. Le papyrus de Rhind, comme les autres documents que nous avons analysés, ce sont les secrets du bon calculateur, du bon comptable. Une des parties finales se rapporte nettement aux comptes d'une exploitation rurale. Elle est visiblement ajoutée, il est vrai, au papyrus primitif : en quelque sorte notes personnelles mises sur les gardes d'un livre usager. Mais cela seul tend à montrer que le papyrus avait une utilisation technique et positive. Il était destiné à satisfaire certains besoins pratiques, mais d'une pratique déjà intellectuelle. En ce sens, le papyrus appartient vraiment à la science. C'est un manuel de calcul.

Or tous les autres documents mathématiques qui nous restent de l'Égypte sont du même ordre, et très voisins de ce manuel. Ce manuel lui-même, le scribe le dit également dans les premières lignes, et il n'y a pas à le révoquer en doute ¹, est la copie fidèle d'un manuel qui remonte à deux ou trois siècles, selon la chronologie adoptée : comme une édition actuelle de l'*Optique* de Newton par exemple, ou une copie des *Éléments* d'Euclide sous Auguste. Nous sommes donc en présence, indiscutablement, de la tradition mathématique égyptienne, d'une tradition qui se maintient dans la même ligne pendant deux millénaires et plus et qui remonte au début du deuxième millénaire.

Cette tradition est adaptée à tout ce que nous savons, à ce que Platon, dans quelques mots si souvent répétés, nous dit de l'esprit égyptien. Cet esprit était tourné vers la pratique, vers la technique, plus que vers la science désintéressée : mentalité de marchands. Et c'est pourquoi, sans doute, cette science est restée si rudimentaire et si pauvre, même du point de vue technique. Car les plus belles applications pratiques résultent le plus souvent, dans l'histoire des sciences, de la spéculation la plus théorique. Elles sont le fruit de la recherche désintéressée. A les poursuivre trop exclusivement, on les manque, parce qu'on manque la science qui les fonde avec solidité et précision.

1. Cf. PEET, *op. cit.*, p. 3, note 1.

VII. LE MANUEL OPÉRATOIRE.

La numération égyptienne est, comme partout ailleurs (sauf à Babylone et partiellement), la numération décimale : on compte avec les doigts des deux mains. Des considérations philologiques nous permettent de croire qu'elle a succédé très anciennement à une numération à base 5 (les doigts d'une seule main). Les mots désignant les 5 premiers nombres ressemblent à des mots africains (hamitiques) et paraissent par là faire partie de l'héritage africain des Égyptiens. Les mots relatifs aux cinq nombres suivants (6-10) ont au contraire des analogies avec les mots correspondants des langues sémitiques. Les quatre premières dizaines sont formées sur des racines tout à fait différentes. Les cinq suivantes sont dérivées des nombres 5 à 9. Peet ¹ considère d'ailleurs tout cela comme douteux, sauf les traces d'un système quinaire très primitif.

Dès la période dynastique, les caractères désignant les ordres de dizaines sont fixés. Le nombre d'unités dans chaque ordre est écrit par simple répétition du signe. Sous la I^{re} dynastie, on trouve déjà les nombres ainsi écrits jusqu'au million.

Les Égyptiens savent additionner et soustraire : les deux opérations essentielles et élémentaires des comptes, tels qu'ils se font sur les doigts. Seulement, ils savent faire ces opérations sur tous les nombres, si élevés qu'ils soient. Ils sont en possession pratique de la règle générale de l'addition et de la table d'addition décimale, puisque telle est leur numération. Mais ils ignorent la table de multiplication. Pour eux, toute multiplication (sauf par 10 et ses puissances) est une suite de duplications. Elle revient toujours à l'addition d'un nombre avec lui-même. La division renverse simplement le procédé de la multiplication. C'est une duplication du diviseur qui le « fait croître », jusqu'à ce qu'on retrouve le dividende. Multiplier 30 par 15 revient à faire les opérations suivantes, ainsi disposées :

$$\begin{array}{rcl}
 30 \times 1 & = & 30 \\
 30 \times 2 & = & 60 \\
 (60 \times 2) & \times & 4 = 120 \\
 (120 \times 2) & \times & 8 = 240 \\
 30 \times 15 & = & 450
 \end{array}$$

S'il s'était agi de multiplier par 13, ils auraient simplement négligé dans l'addition des duplications partielles la première duplication, ce qui donne effectivement les facteurs $1 + 4 + 8 = 13$ du multiplicateur. Négliger la deuxième duplication, ce qui revient à négliger le facteur 4, donnerait le produit par 11 ($1 + 2 + 8$), etc. Grâce à l'écriture hiéroglyphique et à la numération décimale, ils avaient immédiatement les multiplications ou les divisions par 10 et ses puissances. Il suffisait de changer les signes dans la transcription du multiplicande en signes désignant les unités dix fois, cent fois plus fortes, etc., et inversement pour la division. Multiplier par 12 revenait à multiplier par 10 et par 2 : par 104; par 100 et par 4. Ce double procédé leur donnait le moyen d'effectuer la multiplication et la division de nombres quelconques.

La division par 3, sans aucune explication du procédé, apparaît dans de très rares exemples : elle semble donc pouvoir être effectuée directement, bien que d'ordinaire elle se fasse en deux temps, selon un procédé traditionnel.

VIII. LE CALCUL DES FRACTIONS.

Le calcul des fractions est la partie la plus remarquable de la mathématique égyptienne, et la plus poussée. La raison en est qu'il y a là une méthode générale d'expression — bien particulière — imposée par la nécessité de formuler le résultat de tout fractionnement avec la seule unité en numérateur. Deux exceptions seulement pour $\frac{2}{3}$, et, celle-ci, très rarement employée : $\frac{3}{4}$ qu'on énonçait conformément à une appellation qu'on retrouve fréquemment ailleurs : les « deux parties », les « trois parties ». Ces deux exceptions sont, dans l'écriture, représentées chacune par un signe propre qui n'a rien à voir avec la méthode générale pour exprimer toute autre fraction. Cette méthode consiste dans la transcription du nombre usuel qui figure au dénominateur, surmontée d'un signe universel indiquant qu'il s'agit là du tantième d'unité, tel qu'il est spécifié au dénominateur. L'usage de la fraction $\frac{2}{3}$, n'apparaît nullement comme un progrès dans

l'écriture mathématique. C'est bien plutôt un souvenir très ancien, conservé après que la méthode plus scientifique qui permet d'écrire tous les tantièmes, quels qu'ils soient, eût été mise en pratique. Il subsiste en effet des signes spéciaux en écriture hiéroglyphique, pour désigner $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ et $\frac{2}{3}$, et qui remontent sans doute à une époque où, seules, ces fractions étaient d'usage pratique, avant la méthode généralisée de l'écriture hiéroglyphique.

C'est, croyons-nous, cette dernière tradition scripturale très simple relative aux fractions, qui a imposé à la mathématique égyptienne l'énoncé de tout fractionnement en termes n'ayant pour numérateur que l'unité.

Cette tradition nous pose deux problèmes de la plus haute importance pour apprécier le niveau auquel s'était élevée la mathématique égyptienne.

Il s'agit d'abord de savoir si la mathématique égyptienne n'a pas pu s'élever à la conception des fractions à numérateurs quelconques (prendre les 2, les 3 septièmes de quelque chose) et ne pense jamais qu'un tantième unique, — ou s'il n'y a là qu'un procédé graphique. Dans le premier cas, toutes les fois qu'on a affaire à un nombre autre que l'unité au numérateur, il ne s'agirait que de l'indication d'une division non effectuée, donc d'un problème à résoudre. Il ne s'agirait jamais d'une véritable fraction. D'où il suivrait que la mathématique égyptienne n'aurait pas encore un véritable calcul fractionnel ni la conception générale des fractions : toute opération sur les fractions, par suite de la seule existence des fractions à numérateur 1, ne serait en somme qu'une opération sur les entiers. C'est l'opinion de Hultsch ¹. Peet ² montre, à bon droit, selon nous, que de la manière traditionnelle d'écrire les fractions chez les Égyptiens, il ne s'ensuit pas que leur conception des fractions ne fût pas plus générale. L'emploi très ancien des fractions $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{4}$, le fait que dans le papyrus de Rhind on prend à plusieurs reprises, sans intermédiaire, les $\frac{2}{3}$ d'un nombre (Probl.

1. *Die Elemente der ägyptischen Theilungsrechnung in Abhandl. der Kgl. Sächs. Gesellschaft der Wiss. phil.-hist. Classe, Band XVII, Leipzig, 1895.*

2. *Op. cit.*, p. 16.

nos 32, 37, 64, etc.), tendent à lui donner raison. Couramment $\frac{1}{14} \times 2$ est, sans intermédiaire correctement évalué $\frac{1}{7}$, et $\frac{2}{3} \times 2$, $1 + \frac{1}{3}$. Il semble donc que la conception des fractions ayant 2 au dénominateur ait été « parfaitement claire ». Les Problèmes n° 17 et 18 nous montrent que $\frac{1}{6} + \frac{1}{18}$ sont conçus directement comme valant $\frac{2}{9}$ dans le calcul. Le fait que les Égyptiens réduisaient toute multiplication et toute division à doubler ou à partager en deux ne les exposerait guère à rencontrer dans leurs calculs des fractions à numérateurs plus élevés. Ils avaient donc en mains l'instrument nécessaire à leurs calculs, dans toute son extension. Ils n'avaient pas à le pousser plus loin.

Nous trouvons donc, malgré la tradition graphique, une conception déjà généralisée du calcul fractionnel, qui montre les résultats d'une réflexion scientifique sur les concepts d'entiers et de fractions dans la mesure où ils avaient à en user. Malgré la tradition graphique... mieux vaudrait dire, à cause de cette tradition ; car elle a imposé toute une série de calculs et de remarques arithmétiques pour pouvoir être mise en œuvre, avec la virtuosité et la maîtrise que nous voyons dans la documentation qui nous en est parvenue, en particulier dans le papyrus de Rhind. Et ceci nous amène à notre second problème.

De ce qu'une méthode générale s'est instaurée pour *écrire* les fractions, en résulte-t-il qu'une méthode générale ait été inventée pour trouver le résultat à écrire. Il ne le semble pas. Nous ne trouvons formulée aucune règle générale de cette sorte, et tous les essais pour en reconstituer une, comme celui d'Eisehlohr¹ sont en échec. Le fait même qu'une des pièces capitales trouvées dans les documents mathématiques égyptiens (papyrus de Rhind, papyrus de Kahun) est une table des divisions de 2, c'est-à-dire de l'expression des fractions ayant pour numérateur 2, ces fractions n'ayant plus que l'unité pour numérateur, aurait bien l'air de prouver qu'il n'y avait pas de méthode générale connue. C'est par des essais, des tâtonnements, qu'on

1. *Ein mathematisches Handbuch der alten Ägypter.*

serait arrivé aux résultats dont on avait besoin pratiquement. Ceux-ci étaient conservés en des tables transmises dans les manuels mathématiques. Il n'y avait plus qu'à y lire les résultats au fur et à mesure qu'ils étaient impliqués par les calculs.

Encore faut-il que ces essais aient pu être menés à bien une première fois. Les résultats étaient en effet obtenus par une méthode assez régulière et générale de tâtonnements. C'est dans la « preuve » qui, comme nous le verrons, est proprement un procédé logique pour arriver à la solution, que nous trouvons cette méthode. Peet remarque que tous les nombres employés dans les calculs pour la réduction des fractions à des parties aliquotes, sauf 2 : 42 et 56 qui sont des multiples de 7, contiennent seulement 2, 3 et 10 comme facteurs. Ces facteurs sont précisément les diviseurs que savaient manier les Égyptiens (la division par 3 se faisant en deux temps : par $\frac{2}{3}$, division pour laquelle ils avaient une règle générale, puis par 2). Il s'agirait alors, par essais successifs de ces facteurs, de diviser le dénominateur donné jusqu'à ce qu'on arrivât à un quotient compris entre 1 et 2 et tel qu'il pût être exprimé par une fraction dont le numérateur fût précisément égal au dénominateur de la fraction proposée. Soit, par exemple, à calculer $\frac{2}{19}$. 19 nous donne d'abord par divisions successives par 2 ou $\frac{2}{3}$ un premier terme $1\frac{1}{2} + \frac{1}{12}$, soit au total $1\frac{1}{2} + \frac{1}{12}$ de 19 (nous dirions aujourd'hui $\frac{19}{12}$). Les compléments de ce premier terme pour arriver à 2, rentrent dans le type de ces calculs de « compléments » (*skm*) dont le papyrus de Rhind nous offre des exemples comme addition et soustraction de fractions. Ici il s'agit évidemment de trouver la différence entre ce quotient $1\frac{1}{2} + \frac{1}{12}$ et 2. Le résultat correctement énoncé est $\frac{1}{4} + \frac{1}{6}$.

A l'aide de ces calculs de complément qui reposent sur des essais empiriques, on avait d'ailleurs dressé des tables où l'Égyptien n'avait qu'à trouver les compléments qu'il cherchait. Pour

énoncer la solution, il suffit alors de prendre la première fraction trouvée $\frac{1}{12}$, puis d'y ajouter les fractions formées en multipliant les dénominateurs des fractions de complément par le diviseur proposé de 2, 19, soit $\frac{1}{19 \times 4} + \frac{1}{6 \times 19} = \frac{1}{76} + \frac{1}{114}$. Le résultat $\frac{2}{19}$ se trouve correctement énoncé $\frac{1}{12} + \frac{1}{76} + \frac{1}{114}$.

La méthode est tâtonnante et lourde, mais tout de même, l'Égypte, conduite par sa tradition graphique, a découvert que toute fraction ayant 2 au numérateur peut s'exprimer en une somme de fractions qui n'admettent d'autre numérateur que l'unité. C'est le postulat même de la méthode et c'est bien là une loi générale. Seulement, cette loi est en quelque sorte inductive. Elle résulte d'un amas de résultats empiriques¹ souvent fort complexes. Témoins ceux-ci que nous trouvons dans le papyrus de Rhind :

$$\begin{aligned}\frac{2}{61} &= \frac{1}{40} + \frac{1}{244} + \frac{1}{488} + \frac{1}{610}; \\ \frac{2}{89} &= \frac{1}{60} + \frac{1}{356} + \frac{1}{534} + \frac{1}{890}, \text{ etc.}\end{aligned}$$

IX. LE « BLOC EXTRACTIF ».

L'Égypte ne s'est-elle jamais élevée, dans ce calcul fractionnel qui remplit les documents qui nous sont parvenus, à des remarques générales?

Nous trouvons fréquemment des calculs de fractions dans les solutions des problèmes. En voici un : il s'agit de multiplier :

$$\left(1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{114} + \frac{1}{228}\right) \text{ par } \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + 1\right).$$

On établit la solution correcte : 2, par la technique suivante :

On multiplie évidemment le multiplicande par chaque terme du multiplicateur, ce qui donne :

Pour le premier terme de ces derniers, 1, le multiplicande lui-même : $1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{114} + \frac{1}{228}$;

1. CANTOR, *Vorlesungen üb. Gesch. der Math.*, vol. I, p. 24-33.

Pour le deuxième terme $\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36} + \frac{1}{342} + \frac{1}{684}$;

Pour le troisième terme $\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \frac{1}{456} + \frac{1}{912}$;

On fait la somme, chose difficile et complexe, puisqu'on n'accepte pas de fraction dont le numérateur soit autre que l'unité.

On commence par sommer les unités et les fractions assez simples pour qu'on en connaisse de mémoire immédiate la somme, ou qu'on l'ait sur une table : ici 1 d'une part et $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ d'autre part, qui sont séparées de la suite par une ligne verticale.

$\frac{1}{6} + \frac{1}{3}$ est une combinaison qui revient couramment dans les calculs des Égyptiens. Ils savent de mémoire que la somme est $\frac{1}{2}$ et l'écrivent de suite. On a donc une première partie de la somme $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ en termes cherchés, c'est-à-dire en entier ou en fractions ayant l'unité pour numérateur.

Reste à faire la somme de toutes les fractions trop complexes pour qu'on puisse l'écrire de suite et de mémoire, ou en se reportant à une table usuelle. Pour cela faire, il faut opérer. Et nous rencontrons ici une règle générale, une des rares règles générales de la mathématique égyptienne. Dans le papyrus, sous chacune de ces fractions complexes, écrites à la suite les unes des autres, nous trouvons un nombre écrit en rouge (ici en caractère gras) :

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{144} + \frac{1}{228} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36} + \frac{1}{342} + \frac{1}{684} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \frac{1}{456} + \frac{1}{912}$$

$$\text{76} \quad 8 \quad 4 \quad 50 \frac{2}{3} \quad 25 \frac{1}{3} \quad 2 \frac{2}{3} \quad 1 \frac{1}{3} \quad 38 \quad 19 \quad 2 \quad 1$$

Il est visible que ces nombres — entiers ou fractionnaires — sont les quotients du dénominateur le plus élevé 912 par chacun des dénominateurs successifs.

On en fait le total 228, et en face de ce total, est écrite la fraction $\frac{1}{4}$. Or, $\frac{1}{4}$ c'est la valeur du quotient du dénominateur le plus élevé 912 par la somme des quotients écrits à l'encre rouge

228. C'est le résultat de l'addition de toutes ces fractions complexes qu'il nous faut ajouter à celui déjà obtenu des unités et des fractions simples, pour avoir le résultat complet de la multiplication proposée ; celui-ci est donc $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 2$.

Toutes les fois qu'un calcul de ce genre est nécessaire — et il l'est très fréquemment dans les problèmes que nous ont transmis les papyrus, étant donnée l'écriture de toutes les fractions en unités de tantième, — la même règle opératoire est identiquement suivie.

Nous sommes donc ici sortis de l'empirisme et des résultats acquis par tâtonnements. Non plus sur une matière presque instinctive comme l'addition ou la soustraction des nombres entiers qui peut se faire sur les doigts ou très simplement de mémoire, dans une numération décimale où chacune des puissances de 10 a ses signes spéciaux. Non plus d'une manière vraiment primitive et presque empirique comme dans la multiplication ou la division qui n'admettent que la duplication ou le partage par moitié (en somme l'addition d'un nombre avec lui-même). Mais nous avons un procédé de calcul complexe qui nécessite une conception claire de la fraction, du rôle du dénominateur dans la fraction, et des relations possibles entre dénominateurs.

Hultsch ¹ ne veut voir dans cette méthode qu'un changement d'unité : l'unité prise à droite de la ligne valant $\frac{1}{912}$ de l'unité ordinaire ; Rodet ² (suivi par Milhaud ³) prétend que le procédé égyptien est celui du « bloc extractif » qu'on a suivi pendant vingt ou trente siècles encore, notamment chez les Arabes et au moyen âge. Choisir un nombre d'où l'on puisse tirer toutes les fractions « à l'état d'entiers », ou de nombres fractionnaires très simples que l'on sait utiliser commodément dans le calcul. Tout cela reviendrait, en somme, à une méthode analogue à notre méthode de fausse position. On substituerait des entiers aux fractions, parce qu'on ne saurait pas calculer sur les fractions, puis ensuite dans le résultat on remplacerait les nombres

1. *Op. cit.*, p. 9.

2. *Journ. Asiat.*, 1811, p. 198.

3. *Nouvelles études sur la pensée scientifique*, p. 62.

entiers par des fractions en suivant la proportion inverse de celle par laquelle au début on avait passé des fractions aux entiers. Ce serait d'ailleurs déjà une méthode générale, complexe, riche, exacte. Mais Peet¹ fait très justement observer que cette méthode a déjà pour principe essentiel le principe de notre méthode de « réduction au même dénominateur ». Qu'on l'interprète comme on voudra, substitution d'unités ou bloc extractif, ces deux interprétations postulent le même principe essentiel et la même conception rationnelle.

« Il ne peut y avoir qu'un moyen d'additionner des fractions, bien qu'il y ait plusieurs manières d'écrire le calcul »² : c'est la méthode du dénominateur commun. On ne saurait mieux dire. L'application en est seulement rendue plus difficile, plus complexe, à cause des nécessités imposées par le graphisme des fractions, l'unité constante du numérateur. « L'aisance, dit Peet, et l'exactitude avec lesquelles l'Égyptien manie des fractions très complexes appellent souvent notre admiration. »³

Les règles de la multiplication et de la division des fractions sont les mêmes que celles des nombres entiers, en respectant toujours le canon scriptural : l'unité pour numérateur de toutes fractions. Comme ils ne multipliaient que par 2 (ou 10, mais alors il n'y avait qu'à substituer les signes des puissances supérieures de 10 aux puissances inférieures) et que toute division revenait à une multiplication, comme ils savaient réduire toute fraction ayant 2 au dénominateur à une somme de tantièmes simples, ils étaient en possession d'une technique opératoire complète sur les fractions.

Cette technique était encore riche d'une règle générale pour prendre les $\frac{2}{3}$ d'un nombre quelconque : pour les entiers, ils avaient des tables, mais ils savaient les calculer. Quant aux fractions, ils réduisaient la fraction $\frac{2}{3}$ à l'expression équivalente $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ et effectuaient la double multiplication du dénominateur

1. *Op. cit.*, p. 18.

2. *Id.*

3. *Id.*

de la fraction proposée. Prendre les $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{5}$ revient ainsi à écrire $\frac{4}{15} + \frac{1}{30}$. Cette règle permettait la division par 3, en prenant la moitié des résultats obtenus grâce à elle ; et c'était le moyen qu'ils employaient couramment.

De tout cela, il ressort que le calcul des fractions se présente comme une conquête achevée de la mathématique égyptienne dès la fin du troisième millénaire avant J.-C. Nous ne trouvons que là des documents aussi complets et aussi riches. Nous ne savons pas si ailleurs il a pu y avoir à la même époque ou antérieurement une technique d'une pareille richesse et d'une pareille sûreté. Force nous est de ne conclure que sur la documentation qui nous est parvenue. Celle qui nous vient d'Égypte et remonte à cette date nous présente une claire conception de l'entier, de la fraction, du nombre fractionnaire, en eux-mêmes et dans leurs rapports mutuels, des quatre opérations à leur sujet, y compris une notion voisine de notre dénominateur commun, et qui lui est équivalente dans les calculs.

Il y a là un corps de doctrine scientifique incontestable relatif à l'arithmétique, quelle que soit sa part — encore très grande — d'empirisme. Mais la science telle que nous la concevons actuellement admet très bien de ne pas déposer — là où elle n'en a pas encore les moyens — l'accumulation des données de fait. Dès que ceux-ci sont exacts et ne sont reçus que s'ils sont exacts, dès qu'il y a contrôle, dès enfin qu'il y a groupement synthétique des données, il y a science, à notre sens du mot. L'arithmétique égyptienne se présente comme une science expérimentale qui tend déjà à devenir rationnelle, par la généralité de ses procédés de multiplication, de division et de calcul des fractions, par la systématisation, l'unité synthétique qui groupe déjà jusqu'à un certain point les données empiriques.

X. LES PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES.

Ce caractère se marque encore dans les solutions des problèmes arithmétiques qui composent la majeure partie du reste de la documentation mathématique égyptienne. Mais, ici, il est bien plus fortement empirique, beaucoup moins rationnel.

D'abord nous ne trouvons plus aucune vue organisatrice et systématique, comme dans la technique opératoire. Nous sommes avec les problèmes dans le domaine de l'invention singulière. Chaque solution est concrète (elle le restera, pour les problèmes arithmétiques, dans la logistique grecque, problème des fioles, problème des bœufs, etc., mais avec la généralisation des résultats pour but direct). Chaque solution n'est donnée que pour le cas particulier visé, sans qu'on paraisse se douter qu'il peut être la clef, le paradigme de beaucoup d'autres questions du même genre. Un certain nombre de ces problèmes, par exemple, implique une équation du premier degré à une inconnue, comme tant de problèmes d'arithmétique élémentaire. Ils sont résolus empiriquement. Aucune tentative pour formuler des règles générales, aucun groupement de ces problèmes par affinités. Des cas qui sont absolument analogues sont traités de manières totalement différentes. De même pour les équations du deuxième degré à une inconnue telles que nous les rencontrons implicitement dans le papyrus de Berlin et celui de Kahun — une fois dans chaque. Il n'y a là que quelques décompositions fortuites de carrés en deux autres. La méthode est purement empirique ; plus exactement il n'y a pas de méthode, mais des essais. En général on peut croire à une table, à un groupement d'essais dans lequel le calculateur cherche le cas proposé. Et c'est bien l'impression d'ensemble que laisse le papyrus de Rhind.

Cependant nous voyons dans la solution de ces problèmes quelque chose de plus, si nous en envisageons la disposition graphique.

Chaque problème est disposé de la manière suivante : d'abord un titre sous cette forme constante : « Exemple de... » Ensuite les énoncés : « Si l'on te demande, si l'on te dit... » Troisièmement la réponse donnée comme une recette, sans explication : « Fais ceci et cela. » Enfin la *preuve* qui établit que la réponse répond aux conditions de l'énoncé. Assez souvent, la réponse est même donnée sans technique opératoire, comme connue d'avance ; mais elle est justifiée par la preuve.

En s'appuyant sur cet ensemble de faits, la plupart des historiens, en particulier Heath, Milhaud, Peet, etc., ont conclu qu'il n'y avait aucune tentative de logification dans la mathé-

matique égyptienne — une fois sorti des calculs opératoires. Ceci nous semble péjoratif.

Le fait que tous les problèmes sont mis en forme de même façon, quelque empirique que soit cette forme, semble nous révéler un effort d'unification technique, qu'on rencontre d'ailleurs dans la magie. Il n'y a peut-être là que routine, asservissement à la formule qui rappelle une mentalité plus primitive encore. Nous y voyons tout de même quelque chose de plus rationnel et un pas vers la logification.

Il ne faut pas oublier que tous les titres de calculs sont présentés comme des « exemples », donc des modèles ou des paradigmes. Certes, il n'y a jamais une formule générale. Certes, ces paradigmes sont très partiels. Entre certains d'entre eux la différence est plutôt d'ordre philologique dans la position verbale de la question, que d'ordre mathématique. Mais n'omettons pas que le titre est d'ordinaire générique pour un ensemble de cas très particuliers analogues subsumés sous ce titre. Pas de règles générales pour les traiter ; un calcul propre à chaque cas. Seulement, malgré tout, un groupement de questions très voisines par affinité logique. Celle-ci n'en existe pas moins. Le titre : *Exemple de...* n'est plus répété pour des cas très voisins : *exemple de diviser un pain entre 10 hommes...* puis : *pour diviser deux pains, pour diviser six pains...* et ainsi de suite. Les opérations sont différentes, et on en donne le schéma opératoire ; mais conscience est prise du genre du problème ; et la méthode suivie est uniforme. Elle consiste à énoncer le résultat et à le justifier ensuite par la preuve.

XI. LA PREUVE LOGIQUE.

Cette justification par la preuve est elle-même une exigence de l'esprit rationnel. Elle en étale la manifestation. Elle n'aurait aucun sens si la mathématique égyptienne se bornait à annoncer des solutions empiriques, à dresser des tables où l'on puiserait les solutions au fur et à mesure des cas proposés. Qu'on opère ainsi, c'est hors de doute. Nous ne calculons pas les logarithmes, ce que nous savons pourtant faire. Nous les prenons tout calculés dans la table.

C'est ce que fait le calculateur égyptien pour ses opérations dans les fractions. Mais il n'en reste pas à l'empirisme. Il prouve que sa solution est exacte. Et à la fin de cette preuve revient un leit-motiv : « C'est cela », « c'est le nombre en question » analogue à notre « ce qu'il fallait démontrer ». Il ne se fie donc pas à l'intuition empirique. Il aspire à quelque chose d'autre. Et ce quelque chose d'autre, c'est la satisfaction logique. Elle repose d'ordinaire sur un principe général dans un même genre de problèmes (on ne l'a pas remarqué). Ici, il s'agit de diviser un nombre variable de pains entre 10 hommes. Le principe de la preuve sera donc de multiplier le résultat proposé par le nombre de ces hommes : 10, et de retrouver le nombre de pains à diviser. C'est d'une logique rigoureuse : c'est notre preuve de la division.

Elle est opérée par le procédé classique de duplication. Multiplier par 2, puis le résultat par 2 (c'est-à-dire par 4), puis ce second résultat par 2 (c'est-à-dire par 8) et additionner le premier et le dernier résultat ($2 + 8 = 10$); ce qui donne le produit par 10.

Peet, dont l'exposé de la mathématique du papyrus de Rhind est si remarquable et en général irréprochable, n'a peut-être pas assez fait ressortir ce caractère rationnel de la mathématique égyptienne : rationalisation faite autrement que la nôtre, car on n'a pas encore les principes très simples et très généraux que découvriront les Grecs. Mais du même ordre : c'est bien notre logique démonstrative qui s'instaure au milieu de complications, partant de détours qui surprennent nos habitudes déjà si anciennes.

Il s'agit d'exprimer des fractions à numérateurs allant de 1 jusqu'à 10 (de 1 à 10 pains à diviser entre 10 hommes). Le papyrus de Rhind nous donne et nous prouve le résultat pour 1, 2, 6, 7, 8, 9 pains.

Le résultat pour 10 pains va de soi ; le résultat pour 5 pains aussi¹ ; Peet s'étonne qu'on n'ait pas effectué et prouvé le fractionnement de 3 et 4 pains en 10 et qu'on l'ait prouvé pour 1 et 2 pains. Mais serait-ce pas précisément qu'on l'a effectué et prouvé pour 1 et pour 2. Il suffit pour 3 pains d'ajouter les

1. Car on sait couramment prendre la moitié.

deux premiers résultats : de diviser 2 pains, puis 1 pain, et pour 4 de diviser 2 pains puis 2 pains, ce qu'on sait faire et ce qu'on a déjà justifié. La justification de la division pour 1 pain et pour 2, qui nous semble si intuitive, se conçoit alors comme nécessité logique ; elle permet d'établir la justification de toute la suite. Il est vrai qu'il y a une hypothèse plus simple : c'est l'omission du copiste (dont nous ne trouvons pourtant pas d'analogues autre part).

Mais quelle que soit la raison de cette lacune, les choses restent les mêmes au point de vue de l'histoire de la pensée scientifique.

Ce que nous appelons le raisonnement dans nos problèmes n'existe pas dans le manuel opératoire. Quand le détail des opérations nous est donné, il est donné sans explication. Toutefois, la suite même de ces opérations est toujours une suite logique. Elle est un raisonnement implicite. Elle manque assez souvent du reste. Mais ce qui ne manque jamais, c'est la preuve. Et la preuve est un raisonnement en forme qui ne laisse rien à désirer. La partie « découverte » n'est pas expliquée. Souvent, elle a dû être la suite d'essais empiriques. Elle a toujours un caractère direct, intuitif, de tout fait, de donné. Mais ce qui est entièrement scientifique et rationnel, c'est qu'on pose la nécessité de la preuve de ce donné et que cette preuve est un calcul logique raisonné. Elle est la rationalisation de l'essai empirique. Et c'est une démonstration *a posteriori*, voilà tout ; un peu comme lorsque nous supposons nous-mêmes le problème résolu.

Voilà ce qui fait le caractère scientifique incontestable des connaissances mathématiques égyptiennes ; cela et l'ordre d'affinité, ordre déjà logique, dans lequel sont exposées ces connaissances : les connaissances préliminaires (la table des fractions à numérateur 2), puis les problèmes qui sont le plus près d'être résolus à son aide, problèmes de calculs simples sur les fractions, puis des problèmes plus complexes, de ceux que nous mettons aujourd'hui en équation, et enfin des exemples très nets de séries, de progressions arithmétiques, et une progression géométrique ; problèmes de proportions, problèmes de système métrique, applications du calcul des fractions et des procédés qui viennent d'être exposés. Les multiples et sous-multiples des unités de mesures vont par moitié ou par duplication comme dans les mesures de capacité, le *hekat*, ou par dizaines (le *hekat*

contient 10 *henu*), ou par combinaison des deux (le *hekat* contient 320 *ro*, le *henu* 32 — *ro*), etc. Ensuite viennent les problèmes de géométrie, sur lesquels d'ailleurs chevauchent les précédents. Il y a là un enchaînement logique qui achève de donner à ce savoir, malgré sa large partie d'empirisme, un caractère scientifique qui nous laisse entrevoir celui, tout rationnel, que va prendre chez les Grecs la mathématique. Une affinité classificatrice, un ordre d'acquisition des connaissances sont les conditions premières de la science démonstrative.

L'arithmétique égyptienne nous présente donc déjà un corps de doctrine organisée. Et dans cette arithmétique les quatre opérations sur les entiers, les quatre opérations sur les fractions et la méthode remarquable pour opérer sur des fractions de dénominateurs différents, nous présentent un caractère incontestablement rationnel.

Ce caractère n'apparaît du reste que dans ce domaine restreint. Il est lui-même toujours particularisé. Le raisonnement dit « preuve » ne s'applique qu'à des nombres singuliers concrets. Il paraît lié dans chaque cas aux nombres envisagés, à leurs propriétés particulières, sans que le manuel opératoire soit étendu à d'autres et bien moins encore, cela va sans dire, à des nombres quelconques. Pourtant, dans deux cas, nous voyons poindre l'effort rationnel généralisateur : dans la règle générale pour prendre les $\frac{2}{3}$ d'une fraction égyptienne dont nous avons

déjà parlé et dans un problème où il s'agit de diviser 10 *hekat* de graisse en portions journalières, c'est-à-dire par 365. Il nous est dit formellement : « Tu peux faire de même pour tout problème qui ressemble à cet exemple. » Nous croyons d'ailleurs qu'on ne s'élève pas ici, comme dans la règle précédente, à une loi de nombres quelconques. Le véritable sens paraît être : « Toutes les fois que tu as à partager une quantité donnée pour une année entière, en rations journalières, fais de même » Il n'y a là qu'abstraction d'une technique opératoire qui dépasse la forme concrète du problème — abstraction déjà intéressante, car ces formes concrètes ne sont pas dépassées dans les autres problèmes et nous avons signalé leur persistance jusqu'à une époque relativement proche. Ce n'est pas encore la généralisation à une loi de nombres quelconques.

Dans tout le reste de la mathématique égyptienne, forcé est de reconnaître qu'en dehors de l'ordre de classification — *grosso modo* — il ne reste rien que d'empirique. Du moins, dans chaque cas, y a-t-il en général empirisme exact. La solution est juste. Mais si nous faisons abstraction de la suite des opérations, nous ne voyons plus d'effort vraiment rationnel.

Les problèmes dits « calculs de *haw, chw* » (Eisenlohr), c'est-à-dire, si nous prenons ce terme qui signifie monceau, tas, « quantité » indéfinie, dans le sens d'« inconnue » et pour désigner notre x traditionnel, ne sont pas du tout des mises en équation. Ce sont des solutions arithmétiques empiriques et concrètes que nous pouvons bien traduire, nous, par des équations, mais pour lesquels les Égyptiens n'ont aucune méthode générale, aucune formule abstraite. Ils sont, manifestement, incapables — dans les documents que nous avons — d'établir, voire d'imaginer les relations nécessaires d'une quantité inconnue à des quantités données, et d'en déduire d'une façon logique et démonstrative sa valeur. Il n'y a point d'algorithme, sinon les signes qui expriment avec leur sens concret les mots nécessaires à l'indication des opérations. Les problèmes sont résolus par une méthode analogue à la règle de fausse position. On essaye un nombre qui par sa commodité se prête à la solution du problème ; puis, celui-ci résolu sur ce nombre, on revient au nombre cherché en exprimant le nombre trouvé proportionnellement à la relation du nombre essayé avec le nombre proposé.

Pour les progressions, elles ne sont jamais conçues comme indéfinies par les Égyptiens. Ils ne semblent pas, là encore, avoir le concept de série. Quelques termes en sont employés, plutôt sous forme de proportions, pour déterminer précisément dans le cas où celles-ci sont inégales, un nombre concret qui se trouve être un des termes de cette progression¹.

Il n'y a toujours pas là l'ombre de théories mathématiques. Mais il y a le sens très exact de la similitude, de la proportionnalité, tel que nous l'avons déjà trouvé dans la belle méthode voisine de notre méthode du dénominateur commun pour les fractions. Là méthode égyptienne est bien, elle aussi, une méthode de fausse position. Elle substitue des entiers aux fractions, et

1. Une note ultérieure sera consacrée à l'examen des progressions dans l'arithmétique égyptienne.

revient à celles-ci en réduisant les résultats trouvés sur les entiers dans la proportion inverse selon laquelle avaient été augmentées au début ces fractions. Rodet a très bien vu cette analogie opératoire, s'il n'a pas vu qu'au fond l'analogie atteignait aussi logiquement notre méthode du commun dénominateur. Seulement cette connaissance pratique de la similitude qui devient, dans le calcul fractionnel, une méthode presque logique et bien générale, ne sort pas, pour les calculs du *h^cw*, de l'empirisme particulier. Certains problèmes sont traités tout autrement quand les nombres sur lesquels ils portent s'y prêtent. En dehors des quatre opérations et du calcul des fractions, l'arithmétique égyptienne garde donc un caractère manifeste d'empirisme.

XII. LA GÉOMÉTRIE ÉGYPTIENNE.

Ce caractère empirique est encore plus vrai de la géométrie, qui, dans les documents parvenus jusqu'à nous, est restée bien au-dessous de l'arithmétique. Ici, uniquement des solutions particulières, concrètes et pratiques, et sans discrimination aucune entre les solutions exactes et les solutions approchées, pratiquement commodes dans la majorité des cas, mais fausses, en droit comme en fait.

De cette géométrie nous avons déjà des exemples dans les problèmes de mensuration, car il s'agit de déterminer des contenances, donc des volumes. Les problèmes plus géométriques s'y rattachent d'ailleurs de près. Ce sont tous des problèmes d'aires (carré, rectangle, cercle et comparaison du cercle et du carré, triangle, triangle tronqué, trapèze (?), division d'une aire en parties égales, enfin l'inclinaison d'une pyramide et peut-être d'un cône). Tous ces problèmes sont purement concrets : leur solution est directement inspirée des besoins pratiques. Ces solutions n'ont de logique que les calculs métriques qui donnent le résultat. Mais les règles géométriques sur lesquelles se fondent ces calculs sont simplement affirmées par leur utilisation dans le calcul lui-même ; il n'y a pas, au point de vue géométrique pur, le moindre raisonnement, le moindre effort de preuve. Les rares figures qui accompagnent dans le papyrus de Rhind ces calculs, sont simplement et d'une façon très vague l'indication des dimensions données dans l'énoncé du problème. Elles ne

comportent aucune construction, aucune preuve intuitive. Les lignes non visibles qu'implique le problème géométrique, à propos de la pyramide par exemple, ne sont jamais tracées.

Certaines erreurs de calcul (Problèmes 42, 43), certaines confusions (Problème 43 où l'on prend le diamètre de base du cylindre pour sa hauteur et inversement), le fait que la réponse est donnée correctement malgré des fautes de calcul, cet autre fait qu'une méthode ¹ parfois illogique (Problème 45) arrive à un résultat pourtant exact, le fait encore de certains calculs incompréhensibles (Problème 53), tout cela montre que le calculateur ne travaille pas à la lumière de la raison, mais à l'aide d'une règle purement pratique ², comme le dit Peet à propos du Problème 45. Le problème peut être d'abord partiellement résolu, comme par une hypothèse d'essai : ainsi dans le Problème 45, deux des trois dimensions d'un contenant qui doit avoir une certaine contenance sont égales à 10 coudées. On montre alors par le calcul que la troisième leur est égale et que le contenant est un cube de 10 coudées cube ³.

Les documents, ceux que nous avons du moins, semblent donc montrer une géométrie toute empirique et traditionnelle : un ensemble de recettes pratiques, sans l'effort logique que nous avons cru démêler dans l'arithmétique. Ces connaissances empiriques comprennent la solution exacte de la surface d'un carré, d'un rectangle, du volume d'un cube, d'un récipient parallélépipédique à base rectangulaire, du volume d'un tronc de pyramide à base rectangulaire (papyrus de Moscou), l'expression de l'inclinaison de surface de la pyramide sur sa base, comme rapport de la hauteur à la moitié de la base.

Les Égyptiens ont encore d'excellentes approximations de la surface du cercle en prenant pour celle-ci les $\left(\frac{8}{9}\right)^2$ du diamètre, et du volume du cylindre en multipliant cette expression de la surface de base par la hauteur. Comment sont-ils arrivés à cette approximation de la surface du cercle?

Peet déclare la question insoluble. Cependant nous voyons

1. PEET, *op. cit.*, p. 84.

2. *Id.*, p. 86. N'y aurait-il pas aussi erreurs du copiste ?

3. Il est vrai que ce Problème 45 est précisément l'inverse du précédent. N'en serait-il pas une sorte de preuve ?

dans le papyrus de Rhind, à propos du problème où l'on trouve une comparaison de la surface du cercle de diamètre 9 et de la surface du carré de côté 8, une curieuse figure. Elle représente un carré dans lequel est inscrit un octogone, mais les quatre côtés de l'octogone qui ne se confondent pas avec les parties des côtés du carré sont nettement curvilignes. Il s'agirait donc du cercle construit sur le diamètre 9, et superposé au carré de côté 8. Les quatre sections extérieures au carré (non figurées) peuvent alors être intuitivement jugées équivalentes aux quatre parties du carré qui se trouvent exclues du cercle. Effectivement ils le sont à peu près : ce qui donne pour la surface du cercle les $\left(\frac{8}{9}\right)^2$ du diamètre.

Il y aurait là un essai de preuve intuitive, analogue à celles que nous trouvons peut-être dans la géométrie asiatique, ou à celles dont nous allons parler à propos de la surface du triangle. En tout cas, il était aisé d'arriver avec des cordeaux à déterminer empiriquement le rapport de la circonférence au diamètre, avec une assez bonne approximation. Nous ne voyons toutefois rien de semblable dans les documents du Moyen-Empire, où l'on quarre le cercle sans déterminer les valeurs de π .

XIII. LA SURFACE DU TRIANGLE.

Pour le triangle la question devient assez obscure, et c'est un des grands mérites de Peet de l'avoir montré, contre l'interprétation traditionnelle installée par Eisenlohr.

Celui-ci s'appuie sur la grande inscription dédicatoire du temple d'Edfou, construit par Ptolémée XI. Elle donne pour expression de la surface d'un quadrilatère quelconque le produit des demi-sommes des côtés opposés ; c'était la méthode que suivait le fisc égyptien pour la taxation cadastrale : méthode d'approximation qui, en dehors du cas où le champ était rectangulaire et où alors elle était exacte, donnait toujours en ces temps heureux une approximation par défaut, donc à l'avantage du contribuable.

Quand il s'agissait d'un triangle, on le considérait comme un quadrilatère dont un côté était nul, et quand il s'agissait

d'un triangle isocèle l'aire était déterminée par le demi-produit de la base par le côté.

Or, les figures tracées dans le papyrus de Rhind sont toutes des triangles isocèles. Qui plus est, ce sont des triangles isocèles très allongés (la base est appelée « la bouche » comme dans le triangle isocèle allongé qui part de la base du nez dans la figure humaine ; le triangle est appelé la figure en pointe). Enfin les nombres marqués sur la figure et qui correspondent à ceux du calcul, sont écrits l'un sous la base, l'autre le long du côté. Le terme *mryt* que multiplie la moitié de la base dans la formule égyptienne, doit donc désigner le côté et non la hauteur du triangle. Les Égyptiens se seraient satisfaits de cette formule inexacte, qui est une bonne approximation dans le cas du triangle isocèle allongé et qui serait exacte dans le cas du triangle rectangle.

Voilà des arguments impressionnants. Mais il semble bien difficile d'admettre que les Égyptiens n'aient jamais envisagé que le triangle isocèle. Or, dans le cas d'un triangle quelconque, la formule des papyrus nous donnerait deux évaluations différentes de la surface du même triangle, selon le côté choisi. Les Égyptiens avaient dépassé le stade où une telle absurdité pouvait être admise. Le calcul des fractions, certains autres problèmes de géométrie, comme le calcul de la pente des faces d'une pyramide, comme l'obtention du volume du tronc de pyramide du papyrus de Moscou (quelles que soient les interprétations données) nous empêchent, pour notre part, de souscrire à une pareille conclusion, bien que la mentalité mathématique révélée par les documents soit sur certains points fort différentes de la nôtre : de certains calculs qui nous paraissent très simples, il n'y a point de traces ; des calculs bien plus complexes, nous l'avons montré à propos des fractions, sont exécutés avec virtuosité, et pour observer des règles traditionnelles, souvent là où nous voyons immédiatement des solutions bien plus simples.

Mais il y a des remarques plus troublantes. Dans le problème de l'inclinaison d'une face pyramidale, le nombre qu'avec Peet nous prenons pour la hauteur de la pyramide, le *prmwš'*, est marqué à côté du sommet de celle-ci. Le *mryt*, dans un problème obscur du papyrus de Rhind, celui d'un triangle divisé en trois parties par deux parallèles à la base (N° 53), est

écrit au même endroit. Dans les deux cas, la hauteur — ligne auxiliaire — n'est pas indiquée dans la figure. (Du reste, on a parfois traduit *prmw* : « ce qui est hors de vue ».) Nous devons dire toutefois que si le fac-similé du British Museum est correct, le triangle tracé dans ce dernier problème est moins nettement isocèle et pourrait être un triangle rectangle, où hauteur et côté coïncident.

D'autre part, le procédé de taxation cadastrale est manifestement pour l'Égyptien une approximation. Dans les calculs qui nous en restent, les fractions plus petites que $\frac{1}{64}$, parfois même

que $\frac{1}{32}$ du *khet* carré, sont systématiquement négligées. Le procédé qui substitue le côté à la hauteur est, sur le terrain, incroyablement plus facile à appliquer que le procédé exact : nos paysans l'emploient encore couramment. Il suffit de mesurer les côtés, les limites du champ, sans avoir à y tracer une ligne auxiliaire perpendiculaire sur un des côtés. (Pour un quadrilatère quelconque, la mesure exacte serait encore plus complexe : il faut tracer la diagonale et abaisser deux perpendiculaires sur elle). On ne peut donc rien en inférer concernant les problèmes du papyrus de Rhind où les calculs ne négligent jamais une fraction si petite qu'elle soit, où il semble bien ne jamais s'agir d'approximation, du moins consciente.

Resterait l'hypothèse du triangle rectangle, où les deux formules coïncident. Outre que les figures du papyrus de Rhind ne s'y prêtent point, sauf une, il est spécialement et correctement considéré dans le papyrus de Moscou comme la moitié d'un rectangle, et les deux côtés sont désignés sous les noms de longueur et largeur, donc en fonction du rectangle construit avec les côtés de l'angle droit.

Enfin, voici l'argument le plus considérable contre l'interprétation d'Eisenlohr. Ce sont, en solution, les mots : *Ceci* (le nombre trouvé) *est son rectangle*, ou : « Vous avez à prendre la moitié de 4 (la base) pour donner son rectangle » (traduction Peet), expressions reproduites textuellement dans le Problème 52 (triangle tronqué). Ceci évoque invinciblement le procédé intuitif qui consiste à encadrer le triangle isocèle dans le rectangle construit sur sa base et à *voir, si l'on trace la hauteur,*

que sa surface est évidemment égale à la moitié de celle du rectangle. Le procédé peut être généralisé très facilement pour un triangle quelconque (il n'y a qu'à voir deux rectangles au lieu d'un : les deux rectangles élevés sur les parties de la base séparées par la hauteur), et pour le triangle tronqué. Le *mry* serait bien alors comme le *prmw's* de la pyramide, la hauteur. Le sens vulgaire du mot : rive, rivage, port, quai, peut être sollicité aussi bien d'un côté que de l'autre. Même si on le traduisait plus précisément par côté, il peut indiquer le côté du rectangle dont il est parlé dans les calculs et les solutions.

Le calcul du volume du tronc de pyramide carré — qui sera un des théorèmes les plus complexes des Éléments d'Euclide — pose, tel que l'a édité Taraïev¹, d'après le papyrus de Moscou, un problème analogue. Si le *sti* est la hauteur du tronc, comme l'admet Taraïev, la solution est correcte : $\frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$, a et b désignant les deux surfaces parallèles. S'il désigne le côté, nous n'avons, comme pour le triangle, qu'une grossière approximation et une grave erreur technique. Nous serions tentés, comme pour le problème de la surface du triangle, de croire à la solution correcte, à cause du reste de la formule $\frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)$. Pour s'être élevé jusqu'à cette expression, il faut manifestement plus de sens géométrique et logique que pour voir que le facteur restant doit être la hauteur et non le côté. Là encore, il nous faut songer à la différence entre la forme d'esprit du calculateur égyptien et celle de notre géométrie. Mais, tout de même, à côté d'une si remarquable approximation de π (il est vrai qu'elle peut être empirique), à côté des solutions correctes apportées au volume du cylindre, à certaines proportions, à certaines racines carrées (papyrus de Kahun, de Moscou, de Berlin : racines carrées de deux expressions fractionnaires), à côté de la logique de l'arithmétique et surtout du calcul des fractions, est-il raisonnable d'admettre d'aussi grossières méprises vis-à-vis d'un problème si facile à résoudre empiriquement, intuitivement, que celui de la surface du triangle?

Ainsi, non seulement nous concluons sur la question en

1. *Ancient Egypt*, p. 100.

maintenant formellement le point d'interrogation posé par Peet, mais encore nous inclinerions avec réserve à la solution géométrique correcte, à côté de la formule approchée des arpenteurs, solution obtenue par des procédés empiriques, intuitifs, — il n'y a jamais de démonstration ou de preuve sur le terrain de la géométrie dans les documents que nous possédons, — mais solution exacte. Le cas que les Grecs ont toujours fait de la géométrie égyptienne vient soutenir notre vue.

Vraiment les allusions d'Hérodote et de Démocrite supposeraient-elles d'aussi lourdes méprises sur des questions aussi faciles ?

Cette vue, nous l'apportons cependant *avec réserves*, car les documents ne permettent sur ce point que des hypothèses. Ils ne contiennent rien de décisif. On ne peut suppléer au néant.

XIV. ABSENCE DE CONCLUSIONS SUR LA NATURE DE LA GÉOMÉTRIE ÉGYPTIENNE.

Qu'est-ce que les documents nous permettent alors de penser de la géométrie égyptienne ? Certes, qu'elle est de loin inférieure à leur arithmétique, car la preuve, c'est-à-dire le besoin rationnel orienté vers ce qui sera plus tard le raisonnement, la démonstration, n'y intervient nulle part. Le mot de Platon, vraiment exagéré pour le calcul, est tout à fait exact pour la géométrie. Elle est intuitive et plus encore empirique qu'intuitive, car l'intuition géométrique nous orienterait vers quelque chose de probatif, de démonstratif. Et cela, même en mettant les choses au mieux, comme nous y inclinons. Elle reste mesure concrète et arpentage, mesures de capacités, mesures d'architecte (pyramide et tronc de pyramide), arpentage sur le terrain. Les nombres concrets qui y interviennent se rapportent toujours aux unités usuelles du système métrique égyptien. Enfin, aucun ordonnancement des problèmes : une collection de recettes indépendantes.

Il est vraiment curieux qu'à la suite d'Hérodote, les Grecs aient toujours fait remonter leur géométrie aux Égyptiens, jamais leur arithmétique. Est-ce parce qu'ils tenaient celle-ci

de l'Orient? par l'Ionie? tandis que la géométrie leur serait vraiment venue d'Égypte. Tout de même, le théorème de Pythagore, qui, pour les débuts de la géométrie et pour la géométrie tout court, est capital — bien au delà de tout ce que nous venons de voir — leur vient, croyons-nous, au moins pour la partie empirique et intuitive, d'Orient.

Et alors une question très grave se pose, très grave parce qu'elle est insoluble dans l'état actuel de notre documentation. Les éléments que comprend cette dernière nous apportent-ils en gros l'essentiel de la mathématique égyptienne, surtout de la géométrie? Songeons que nous n'avons que quelques fragments, tous de la même époque : fin du troisième millénaire ou début du second.

Le papyrus de Rhind, qui est le document de beaucoup le plus important, nous présente un manuel de calcul opératoire déjà remarquable pour la partie arithmétique, et quelques compléments, quelques recettes métriques. Il est copié par un pauvre mathématicien, étant donné les fautes qu'il contient, surtout à la fin. Il a été sans doute entre les mains d'un propriétaire terrien, témoins les quelques lignes de compte ajoutées d'une autre main que de celle du scribe. De toutes façons il paraît exotérique, un manuel pour une pratique presque quotidienne.

Le papyrus de Moscou, qui ne comprend que quatre problèmes géométriques et qui n'est pas encore totalement édité d'une façon critique, nous fait connaître, — à côté de ce que nous rencontrons partout ailleurs, paraît-il, — un problème difficile et complexe : le volume du tronc de pyramide que nous n'atteignons qu'au livre XII d'Euclide. Et il se peut que sa solution soit exacte.

Ne pouvait-il donc y avoir une géométrie plus ésotérique que celle dont nous avons ici les traces et qui laisse entrevoir, par instant, certaines solutions plus subtiles que celle qu'elle nous offre? Nous ne trouverions, dans les papyrus qui nous sont parvenus, que quelques données utiles à ceux qui avaient à s'en servir.

Nulle part, il ne paraît que nous ayons un document ésotérique — s'il en existait. Le procédé constant du papyrus de Rhind pour introduire les questions : *Exemple de...* ne

peut-il laisser supposer qu'il y avait tout de même autre chose dans la mathématique égyptienne? Ne savons-nous pas que les collèges de prêtres étaient très jaloux des secrets d'une science qu'on s'accordait à penser qu'ils possédaient, si nous en croyons les documents grecs.

La simple affirmation des solutions, sans preuve, même intuitive, empêche-t-elle qu'ailleurs on eût des solutions probatives, tout au moins accompagnées des tentatives de recherches qui les avaient fait découvrir? Comment comprendre la solution, voire la position du problème du volume du tronc de pyramide, sans cela? D'autant plus que pour le calcul élémentaire nous avons constamment des « preuves » dans le papyrus de Rhind. Pour affirmer les solutions, il fallait les avoir trouvées. L'empirisme pur a bon dos. D'ailleurs il serait déjà, pour certains problèmes de science, assez complexe. L'expérience a sa place dans la science, dans toute science. Et si l'on pouvait déterminer ici sa juste place, quel intérêt y prendraient le théoricien de la connaissance et l'historien de la pensée scientifique!

De plus, nos documents sont tous du même milieu : la XII^e dynastie. Le fait que des documents postérieurs de deux et trois mille ans nous montrent les mêmes procédés de calcul prouve que c'étaient les procédés du calcul pratique et empirique. Nous en utilisons encore aujourd'hui de semblables. Si même nous interprétons dans le sens des solutions erronées les formules géométriques litigieuses du papyrus de Rhind, ce sont ces solutions erronées qu'emploie encore aujourd'hui notre arpentage, à vue de nez, et qui sont couramment exposées chez les *agrimensores* romains des premiers siècles de notre ère. Et pourtant il y a eu le formidable monument mathématique élevé à Athènes et à Alexandrie. Ne savons-nous pas encore qu'à Rome, et pendant le haut moyen âge, les éléments d'Euclide étaient couramment réduits aux énoncés, sans démonstrations?

Mais que s'est-il passé chez les Égyptiens en géométrie, voire en arithmétique, — puisque nous voyons déjà des pressentiments logiques dans un manuel qui pourrait bien être exotérique, — depuis 2000 avant J.-C. jusqu'à l'éveil de la géométrie grecque? mystère. Y a-t-il eu déjà en 2000 avant J.-C. (date voisine de celle du papyrus de Moscou), une science plus ésotérique? autres mystères.

Socrate n'a-t-il pas entendu dire dans le *Phèdre* que Thoth a été l'inventeur de l'*arithmétique*, du *calcul*, de la géométrie et de l'astronomie — et cette tradition nous semble mieux informée que celle d'Hérodote qui ne parle que de géométrie. Aristote ne parle-t-il pas des prêtres égyptiens comme occupés à la science mathématique? Proclus ne répète-t-il pas que Thalès a importé la géométrie d'Égypte, rejoignant ainsi Hérodote?

Enfin si Platon, au IV^e livre de la *République*, nous présente les Égyptiens comme étant *généralement* « un peuple de boutiquiers », son contemporain Démocrite ne proclame-t-il pas avec orgueil que personne de son temps ne l'a dépassé en construisant des figures avec des lignes, et en en *prouvant* les propriétés, « même pas les harpedonaptes *égyptiens* »? Il fallait, pour que l'éloge tint, que le terme de comparaison fût tout de même autre qu'une grossière méprise sur la surface du triangle, ou en acceptant notre interprétation plus favorable : les quelques propositions empiriques auxquelles se réduit notre érudition, si l'on en excepte le problème de la pyramide tronquée.

Disons-nous bien, en fin de compte, que nous sommes peut-être, avec notre documentation égyptienne, à peu près en face de la documentation qu'on rencontrerait dans quatre mille ans, en exposant les ruines de notre civilisation, s'il n'en subsistait par exemple que des livres de classe, en y comprenant même ceux d'une école d'ingénieurs. Les conclusions sur les limites de notre science mathématique seraient sans doute hasardeuses jusqu'au jour où l'on exhumerait un mémoire d'un des grands mathématiciens de ce temps.

Il nous est donc seulement possible de conclure de manière positive, *par les documents que nous avons*, à une partie *certaine* du contenu de la mathématique égyptienne sous la XII^e dynastie. Mais il nous est interdit d'aller plus loin, et — ce qui serait le plus intéressant pour l'histoire de la pensée scientifique — d'établir ce que les Grecs ont pu en recevoir entre le VI^e et le V^e siècle. S'appuyer pour ce faire sur notre pauvre documentation, comme l'ont fait la plupart des historiens jusqu'ici, nous paraît étrangement arbitraire. Ne faut-il pas du moins poser tous les points d'interrogation que nous venons de marquer, et conclure pour le moment en faisant la somme par un point d'interrogation final?

XV. ÉPILOGUE : L'ÉTAPE DE LA PENSÉE SCIENTIFIQUE MARQUÉE PAR LA MATHÉMATIQUE ÉGYPTIENNE.

Sur un point cependant, nous pourrions peut-être pousser plus avant. Quelles que soient les lacunes — énormes sans doute — que laissent subsister les papyrus qui nous sont parvenus, la vraisemblance nous porte à penser que les documents d'époque similaire devaient marquer un esprit analogue. Même si des traités plus profonds (plus hermétiques peut-être) ont existé, il est impossible que la pensée qui les animait n'ait pas transparu dans ceux qui nous sont parvenus. A lire un manuel d'arithmétique primaire aujourd'hui¹, on ne pourrait pas, entre les lignes, et à certaines définitions, ne pas soupçonner le caractère logique et rationnel de notre mathématique, son exigence démonstrative, et l'allure spéculative et désintéressée de la science. On ne pourrait guère ne pas apercevoir qu'il y a là le reflet lointain d'une science beaucoup plus avancée, d'une « science » au sens complet où nous l'entendons aujourd'hui. Remarquons que le papyrus de Rhind, dans les premiers mots, se flatte de nous livrer « les règles pour faire des recherches sur la nature, pour connaître tout ce qui existe, chaque mystère et chaque secret ». Même si nous faisons la part d'une emphase presque ridicule², même si nous interprétons secret et mystère dans le sens de ces curiosités, ces énigmes, sous lesquelles la mathématique du moyen âge et du xvi^e siècle aimait à présenter ces solutions — et que lui reproche Descartes, — il semble bien qu'il ne s'agit pas là d'un document de dernier ordre, ou d'un simple memento pratique *ad usum Delphini*. Comme tous les autres papyrus manifestent le même esprit, jusques et y compris, ceux qui sont postérieurs à la mathématique grecque, il serait hypercritique de nous reprocher une induction sur cet esprit, si nous croyons devoir nous l'interdire sur l'inventaire des connaissances qu'il a inspirées. Celles-ci ont pu être plus amples, plus poussées ; elles ont pu d'ailleurs se développer après la XII^e dy-

1. Et encore il y en a de si pauvres... Mais enfin, le calcul des probabilités ne nous permet pas de supposer que, des vestiges d'une civilisation, il ne resterait que ce qu'il y a de plus pauvre.

2. Et qui peut être le souvenir d'une phase antérieure et mystique de la science du calcul.

nastie, car les fragments postérieurs peuvent ne se rapporter qu'à une science toute élémentaire¹. Mais, chose évidente, l'allure générale des connaissances mathématiques est la même dans tous les documents que nous possédons.

Nous ne reviendrons pas sur le caractère semi-rationnel de l'arithmétique. Ce qui le définit, c'est que l'Égyptien n'a jamais l'exigence de la démonstration au sens où nous l'entendons aujourd'hui, cette démonstration qui est en même temps découverte, mais qu'il a celle de la preuve et qu'il applique correctement la déduction logique dans les calculs nécessaires à la preuve.

Il est impossible de ne pas reconnaître là une science, — qui n'est déjà plus empirique, — mais qui reste pour ainsi dire expérimentale et technique. Nous nous servons de cette expression, non pour assimiler la mathématique égyptienne à notre science expérimentale, ce qui serait grossièrement erroné, mais pour indiquer un stade de la pensée méthodologique: celui de la preuve *a posteriori*, de la légitimation ultérieure et non antérieure. Le propre de notre science expérimentale, en effet, c'est d'exiger une preuve là où elle ne peut démontrer, tandis que la science purement démonstrative, la mathématique s'en passe puisqu'elle démontre *a priori*. Son procédé de recherche, le « raisonnement », porte en lui-même sa preuve, et une preuve irréfragable, bien supérieure à toute justification, et cela dans tout théorème², dans tout problème. Si nous faisons la preuve dans les opérations arithmétiques, ce n'est pas pour confirmer notre procédé, mais pour nous assurer que, dans son application, nous n'avons pas fait de faute. Et nous démontrons le procédé de preuve, comme nous démontrons le théorème qui établit le procédé opératoire. Et notre arithmétique théorique manifeste le même besoin de le démontrer.

Pour l'Égyptien, il semble visible — du moins dans nos documents — qu'il a un dispositif opératoire (une règle particulière

1. Notons cependant que le scribe de la XVIII^e dynastie copie un document de la XII^e, sans indiquer qu'il y a ajouté, et manifestement, il n'y ajoute rien. Comme le fait remarquer Peet, le document renferme tout ce qui était utilement nécessaire à l'Égyptien pour ses comptes, dans les circonstances ordinaires dans lesquelles se déroulait sa vie. L'esprit positif, mieux encore « technicien », de l'Égyptien ne sentait pas le besoin d'aller au delà.

2. Sauf dans un théorème non démontré comme celui de Fermat. La preuve seule alors le justifie inductivement, à la manière de la mathématique égyptienne.

et concrète) à laquelle il s'est élevé par des « essais » et dont il justifie l'exactitude par sa preuve, lorsque celle-ci n'est pas intuitivement visible. Dans sa géométrie, en général, elle l'est. Alors il ne la justifie pas. Sa méthode de calcul fractionnel, qui est son chef-d'œuvre, ne va pas au delà. Il est arrivé à une règle beaucoup plus générale, voilà tout. Mais il n'en a pas démontré la nécessité logique¹. Dans toutes ses applications particulières, il la justifie, selon sa méthode habituelle. C'est la preuve qui tient lieu de démonstration, parce qu'il n'y a pas de démonstration.

Il a donc l'exigence de la preuve comme dans nos sciences expérimentales, et, comme dans celles-ci, la preuve est tout près de la méthode de recherche. L'expérience qui confirme une induction n'était-elle pas déjà le moyen par lequel on a atteint cette induction. Ici aussi la preuve est débarrassée des essais infructueux, un moyen d'arriver à la solution.

Mais l'Égyptien, s'il sent l'exigence de la preuve, ne sent pas celle de la démonstration, essence de toute science mathématique, depuis les Grecs.

Second caractère capital : sa science est très près de la technique. Elle la dépasse parce qu'elle justifie — par la preuve — cette technique. La règle n'est plus une recette, comme on l'a dit. Elle n'est plus la transmission traditionnelle d'une formule dont on ne songe pas à discuter l'efficacité, une routine aveugle. Son bien-fondé est établi par la preuve. Si on la prouve, c'est pour la justifier d'une façon déjà logique sur le terrain du bon sens égal chez tous. Il y a en quelque sorte expérience probative, pour asseoir la technique. La règle tend à devenir une loi, — si particulière qu'elle soit, — par la preuve qui l'impose.

Nous tournons le dos à la technique magique ou empirique. Nous regardons vers la technique, art rationnel.

Pas une fois n'est évoquée, dans tous les papyrus que nous avons, une allusion religieuse, mythique ou magique. Nous sommes sur ce point au delà du pythagorisme, si nous en restons très en deçà, sur tant d'autres. C'est peut-être à cause de cette séparation si complète de la technique pratique vis-à-vis de toute influence religieuse ou mythique, que le mathématicien

1. Encore une fois dans les documents qui nous sont parvenus. Et leur analogie sur ce point laisse peu de place au doute.

égyptien en est resté à une technique opératoire toute nue, sèche, étroite, rigoureusement pratique, sans réelle envolée scientifique et pleine de limitations. En demeurant terre à terre, elle est restée balbutiante. Elle ne peut aller loin. L'esprit de la science grecque sera philosophique : c'est là son plus formidable ressort. Il sera philosophique non point par pure exigence rationnelle, au début surtout, mais par ses attaches à des pensées générales qui lui viennent d'ailleurs : religion, mythe ou magie, mythe surtout. Ce n'est pas un simple ornement du discours que le mythe platonicien. L'esprit grec, jusqu'à la fin, y restera sensible. Serait-il hasardeux de dire que le besoin philosophique, même le plus rigoureusement rationaliste, la volonté d'expliquer, de persuader, de démontrer, ont été engendrés et nourris par une inspiration qui s'apparente au mythe, à l'effort d'universalité explicative de ce mythe ?

Tel quel, l'esprit de la mathématique égyptienne est déconcertant de positivité : une positivité qui se satisfait pleinement et se suffit à elle-même — et d'autant plus étonnante que la civilisation égyptienne est loin d'être à l'unisson, même dans le domaine des connaissances et des techniques. Ici, rien qui dépasse l'utilité immédiate toute nue. La mathématique des peuples de l'Asie reste, autant qu'on peut le conjecturer, plus près des religions, des mythes ou de la magie. La démonstration pythagoricienne y semble pressentie ; mêlée toutefois d'éléments extra-scientifiques, mais si proches du besoin métaphysique. Nous verrions là une toute autre étape de la pensée scientifique : celle qui donnera, par l'Ionie, à la science grecque sa couleur philosophique, et la sortira pour toujours, et avec quelle netteté, de l'ornière technique.

L'étape que marque l'esprit de la mathématique égyptienne serait bien plutôt la première prise de conscience de la positivité, sans plus. Cette positivité, nous la retrouvons aussi dans la science grecque, mêlée, alliée cette fois, à l'esprit philosophique. Esprit de positivité aussi essentiel à la science grecque que son esprit philosophique, car si celui-ci l'écarte de la technique sans suffisant effort de compréhension, le premier l'écarte des déviations extra-naturelles. La géométrie rationnelle ne fût peut-être pas née sans le souffle métaphysique qui la porta vers la démonstration explicative. Elle ne fût certainement pas

née sans le souci positif qui fit du même coup de la démonstration explicative une démonstration probative. Il fallait à la fois dépasser la nature et lui demeurer fidèle, en la continuant pour ainsi dire selon sa loi et dans son sens.

Au confluent de civilisation antique dont il a fondu les inspirations dans une synthèse de si puissante originalité, le génie grec ne serait-il pas essentiellement le témoignage de cette alliance que l'histoire nous montre aussi malaisée à préciser que de nécessaire réalisation? N'y aurait-il pas là un des secrets de son universalité?

Encore des points d'interrogation. L'absence à peu près complète de toute documentation sur les « passages », sur la mêlée qui aboutit à la Méditerranée, risque de les laisser toujours d'interrogation.

ABEL REY.