

REVUES GÉNÉRALES

HISTOIRE DES SCIENCES ¹

GÉOMÉTRIE

I.

L'histoire de l'âge préscientifique, pour la géométrie, n'a jusqu'à présent recueilli que des documents trop insignifiants pour que l'on ait pu résoudre la question capitale dans l'objet : quel est, au juste, le niveau auquel peuvent s'élever les notions élémentaires avant d'être constituées en un corps de doctrine déductive, comme elles le furent en Grèce, à dater de Pythagore ? J'estime, pour ma part, que ce niveau est assez bas, surtout relativement à celui des connaissances arithmétiques. Si des découvertes, qu'on peut toujours attendre, viennent me donner un démenti, au moins n'ébranleront-elles pas ce fait, bien constaté, que tandis que, pour l'arithmétique, on ne peut relever des erreurs primitives, corrigées par les progrès de la science, les besoins de la pratique ont entraîné, dès l'origine, des évaluations métriques approximatives, à la vérité satisfaisantes dans certaines conditions peut-être réalisées alors ; mais, par là suite, ces évaluations se sont traduites

1. Voir *Revue de Synthèse historique*, octobre 1900, p. 179 et suiv. — J'y ai dit, p. 186, que les plus anciennes traces des carrés magiques ne se rencontraient qu'assez tard chez les Arabes. Dans un volume récemment publié par Suter (*Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke*. Leipzig, Teubner, 1900), je relève au contraire le titre d'un traité sur ce sujet dans les écrits de Tâbit-ibn-Kurrah, qui vécut de 826 à 901 de notre ère.

en formules qui, appliquées à des cas très divers, ont constitué de véritables erreurs, et qui ont lutté, dans la pratique, avec une persistance singulière, soit contre les formules scientifiques exactes, soit contre d'autres approximatives, reposant sur une théorie irréprochable, et pourtant souvent aussi simples.

Mais si nous attendons encore des égyptologues ou des assyriologues les révélations qui permettront sans doute, un jour ou l'autre, de trancher la question précitée, l'histoire de la géométrie pratique est incontestablement la branche de l'histoire des mathématiques qui, vers la fin du XIX^e siècle, a donné lieu aux recherches les plus fructueuses. Or, la géométrie pratique c'est précisément la géométrie préscientifique, tant que la science n'est pas constituée; et même ensuite, elle demeure comme le sous-sol de l'édifice bâti sur les fondements communs, mais sous-sol encore plus ou moins obscur pendant longtemps.

Ce sont les principaux résultats des travaux historiques poursuivis sur ce sujet depuis un quart de siècle, que je me propose de résumer dans cet article, tout en y signalant en même temps l'état des questions encore débattues. Mais tout d'abord j'ai à appeler l'attention sur cette circonstance que, s'il importe à tous de savoir compter, au moins autant que de savoir écrire, si les notions les plus élémentaires de géométrie sont également et au même titre indispensables pour les affaires de la vie usuelle, la pratique géométrique est au contraire une technique de métier, un art professionnel; et que, dès les temps barbares, dès qu'il y eut des champs partagés et des villes bâties, il y eut aussi, quelque nom qu'on leur donnât, des géomètres-experts, des arpenteurs et des métreurs-jurés.

Un fragment de Démocrite nous a conservé la désignation grecque de ces professionnels en Égypte, les *harpédonaptes* (attacheurs de cordeaux). En Grèce, les *mesureurs de terre* ont changé de nom quand la *géométrie* fut devenue une science; ils s'appelèrent les *diviseurs de la terre* (géodètes)¹. A Rome, les *agrimensores* ou *gromatici* qui, sous l'Empire, formeront une classe spéciale de fonctionnaires, ont une discipline empruntée aux Étrusques. Nul doute qu'à l'origine, ces arpenteurs n'aient

1. Ce mot a pris chez les modernes un sens tout à fait différent. La *géodésie* n'est plus, comme l'arpentage, une simple technique, c'est une véritable science, appliquée aux grandes mesures, pour lesquelles la courbure de la terre n'est plus négligeable.

également présidé aux constructions; ce sont les *harpédonaptes* qui ont orienté les pyramides, de même que, lors de la fondation des colonies, les *gromatici* déterminaient la direction de l'axe du monde, le *cardo*, et de la ligne qui le croisait, le *decumanus*. Ces arpenteurs concentraient donc en eux toute la préscience, astronomie et géométrie, et leurs procédés traditionnels semblent avoir longtemps gardé un caractère rituel ¹. Mais plus tard le développement de la civilisation, amenant la division du travail social, amoindrit leur rôle. A côté ou plutôt au-dessus d'eux, et les confinant dans leurs fonctions primitives, apparaissent les directeurs de constructions, les hommes qui font des dessins ou des épures plutôt que des toisés ou des calculs, les architectes ou les *mechanici* (ingénieurs). C'est là une seconde branche de la géométrie pratique, branche qui se rattache beaucoup plus étroitement à la théorie, provoque les questions nouvelles et profite immédiatement des solutions.

L'arpentage proprement dit, même en y ajoutant les procédés pour la mesure des longueurs inaccessibles, est loin de fournir la matière des *Éléments* d'Euclide. Tant qu'il n'a pas recours à la mesure des angles sur le terrain (progrès aussi moderne que le mot de trigonométrie), il lui suffit d'adjoindre au livre I les règles de la similitude des triangles. Ce fut au contraire la technique des constructions qui introduisit les autres questions de tracé et de métrique élémentaire (polygones et polyèdres réguliers ², stéréométrie des polyèdres et des trois corps ronds), qui souleva également dès le v^e siècle avant notre ère, avec le problème de la quadrature du cercle, ceux des moyennes proportionnelles et de la division de l'angle dans un rapport donné, problèmes qui dépassaient le cadre des *Éléments* et amenèrent les développements ultérieurs de la géométrie grecque.

Les connaissances métriques réclamées par les besoins de la pratique restaient encore incomplètes au temps d'Euclide; il n'y avait pas un siècle que la mesure exacte de la pyramide et du cône

1. Dans l'Inde, les *Çulvasoutras* (règles du cordeau), le plus ancien monument de la géométrie orientale (appliqué à la construction des autels), semblent avoir eu un caractère analogue. On n'a pu, au reste, déterminer si ces *Règles* sont antérieures aux conquêtes d'Alexandre, et si, par suite, elles sont absolument originales.

2. Il faut excepter (avec l'octaèdre) le dodécaèdre et l'icosaèdre réguliers, dont les formes sont celles de cristaux naturels qui, d'après M. Lindemann, paraissent avoir été l'objet d'un fétichisme très étendu.

avait été découverte par Eudoxe ! Ce fut Archimède qui posa les dernières pierres de la métrique ancienne, d'une part en déterminant les mesures des surfaces des corps ronds, de l'autre en calculant, pour le rapport de la circonférence au diamètre, une valeur simple et située entre des limites d'erreur assez rapprochées pour qu'elle pût être couramment appliquée.

II.

De la métrique des *harpédonaptès* égyptiens, il nous reste quelques problèmes insérés dans le *Manuel d'Ahmès* (papyrus Rhind, publié par Eisenlohr, en 1877 ¹). Le type de ces problèmes se retrouvera identique dans tous les ouvrages d'arpenteurs dont nous aurons à parler : énoncé en termes concrets, avec données numériques ; indication et exécution, au fur et à mesure, des opérations à faire jusqu'à ce que le résultat soit obtenu ; aucune justification théorique. — Des géodètes grecs, on avait depuis longtemps, dans les manuscrits, divers recueils de problèmes analogues, portant, les uns, les noms supposés d'Euclide, d'Archimède ou de Diophante, mais la plupart celui de Héron. On les négligeait, les prenant pour des compilations byzantines (ce qu'ils sont en réalité) et les attribuant à un prétendu Héron le Jeune, lorsque l'intérêt métrologique qu'ils présentaient fit proposer, en 1816, leur étude comme sujet de prix par l'Académie des Inscriptions. Un mémoire de Letronne fut couronné, mais l'auteur en différa la publication qui n'eut lieu qu'après sa mort, par les soins de Vincent, en 1851 ². Les conclusions tendaient à faire remonter à un maître de Proclus, par conséquent au ^v^e siècle, ce qu'on appelait les fragments héroniens. En 1854, un célèbre mémoire de Th.-H. Martin ³, repoussant ces conclusions, imposait pour quarante ans une solution de la question. A part une *Géodésie*, qui doit en réalité valoir pour anonyme et qu'on peut dater de 938 (celle du prétendu Héron de Byzance), les divers écrits héroniens

1. *Ein mathematisches Handbuch der Alten Ägypter übersetzt und erklärt.* Leipzig.

2. *Recherches critiques, historiques et géographiques sur les fragments d'Héron d'Alexandrie.*

3. *Recherches sur la vie et les ouvrages d'Héron d'Alexandrie disciple de Clésibius, etc.*

sont des adaptations plus ou moins anciennes et plus ou moins fidèles de diverses parties d'un grand ouvrage, les *Métriques*, composé environ cent ans av. J.-C. par le grand mécanicien d'Alexandrie, disciple de Ctésibius. Dix ans plus tard, en 1864, Fried. Hultsch donnait une excellente édition critique des écrits en question. — Enfin, ce qui nous reste des agrimenseurs romains forme un *corpus* réuni dans un célèbre manuscrit du ^{vi}^e ou du ^{vii}^e siècle, l'*Arcerianus* de Wolfenbüttel, et publié, en 1848, avec un volume de savants commentaires (1852), par Blume, Lachmann et Rudorff¹. Toutefois ces éditeurs, s'attachant surtout à l'histoire des institutions et du droit, avaient laissé de côté l'écrit le plus important au point de vue mathématique, le *liber Epaphroditii et Vitruvii Rufi*.

Tel était l'état de la question, lorsqu'en 1875, Moritz Cantor publia, sur la géométrie pratique dans l'antiquité, une des plus remarquables études qu'on lui doive²; s'attachant aux ressemblances de fond et de forme entre les problèmes du *Manuel d'Ahmès*³, ceux des écrits héroniens, et ceux des *gromatici*, dont il donnait la partie inédite, il concluait que Héron d'Alexandrie avait dû se conformer au type, traditionnel en Égypte, des problèmes métriques; qu'à côté des formules exactes et scientifiques, il avait recueilli des procédés approximatifs de l'antique Égypte, plus ou moins grossiers; que c'était dans son ouvrage qu'avaient puisé, d'une part les *gromatici* romains, de l'autre les géodètes byzantins. Il rattachait à l'école des premiers l'*Ars geometriæ* de Boèce, et montrait comment leur *corpus*, déjà utilisé dans les *Propositiones Alcuini ad acuendos juvenes*, avait servi plus tard pour la composition de la *Geometria Gerberti*, dont il admettait l'authenticité; il faisait enfin ressortir comment, par cette voie, les mêmes procédés de calcul et aussi les mêmes erreurs s'étaient perpétués pendant tout le moyen âge et se retrouvaient encore dans la *Margarita philosophica* de 1503.

De cette brillante synthèse, couronnement d'une œuvre d'érudition qu'il sera toujours utile d'étudier, la pierre qui paraissait la

1. *Die Schriften der römischen Feldmesser* (Berlin, Reimer). — I. *Gromatici veteres*. — II. *Erläuterungen*.

2. *Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmesserkunst*. Leipzig, Teubner.

3. S'il n'était pas encore publié en 1875, Eisenlohr avait déjà donné des communications sur ce papyrus. Il était d'ailleurs collègue à Heidelberg de Moritz Cantor.

plus solidement assise vient de s'écrouler presque subitement. En 1893, M. Diels, à propos des *Pneumatiques* de Héron d'Alexandrie, déclarait, comme philologue, que cet ouvrage ne lui paraissait pas antérieur au second siècle de notre ère. La même année, M. Carra de Vaux, publiant, d'après le texte arabe, les *Mécaniques* de Héron d'Alexandrie, signalait un grave indice de postériorité par rapport à Pline, tandis que M. Clermont-Ganneau¹, dans un nom difficile à lire du même texte, reconnaissait sûrement « Posidonius le stoïcien », comme cité à propos d'une définition du centre de gravité. Héron est donc à replacer au plus tôt au premier siècle de notre ère. D'autre part, un manuscrit grec des *Métriques* était découvert par R. Schöne à la bibliothèque du Sérail, et en attendant que sa publication, dans l'édition des œuvres de Héron commencée par la maison Teubner de Leipzig, permette de trancher définitivement la question des rapports entre cet ouvrage et les écrits byzantins, on peut dire, d'après les communications qui ont déjà été faites sur le manuscrit de Constantinople, qu'il oblige M. Cantor à renoncer à nombre de ses conjectures. Je signalerai seulement, comme circonstance de forme, qu'à la différence des écrits d'arpentage dont j'ai parlé jusqu'ici, les *Métriques* de Héron n'énoncent point, dans les données numériques, les unités comme concrètes (pieds, coudées, etc.).

Or, si Héron a vécu après la conquête romaine, la probabilité qu'il se soit rattaché directement par la tradition aux anciens *harpédonaptes* diminue de beaucoup. L'identité de forme pour les problèmes numériques tient-elle réellement à un emprunt des Grecs aux Égyptiens, et des Romains aux Grecs, ou peut-elle s'expliquer par la similitude d'action de l'esprit humain dans des circonstances semblables? En tout cas, s'il y a eu emprunt sous ce rapport, il faut le faire remonter bien au delà de Héron et aussi haut que possible. Quant aux approximations caractéristiques de la métrique égyptienne, en réalité elles ne se retrouvent ni chez les *gromatici* ni chez les géodètes. Les uns et les autres connaissent de fait les résultats acquis par Euclide et Archimède; si, par exemple, ils emploient accidentellement la valeur 3 pour le rapport de la circonférence au diamètre, ce n'est point là la valeur égyptienne qui est $(\frac{16}{9})^2$, et il s'agit d'une approximation si obvie qu'il

1. *Études d'archéologie orientale*, Paris, 1895, I, p. 131-137.

n'est point nécessaire de lui attribuer une origine déterminée. Quelques grossières évaluations de ce genre ont bien pu d'ailleurs passer des agrimenseurs romains aux géodètes byzantins, car ceux-ci sont, dans l'organisation sociale, les successeurs des premiers, et leur principale fonction, c'est la tenue à jour du cadastre territorial, pour l'assiette de l'impôt. Mais pour le plus grand nombre des approximations non scientifiques, je suis porté à croire qu'elles appartiennent plutôt à la technique grecque, développée de meilleure heure et copiée par les Romains; les erreurs les plus graves des agrimenseurs consistent d'ailleurs dans des emprunts à la science grecque de résultats mal compris. Le plus curieux est le suivant :

Les Pythagoriciens avaient conçu des nombres polygones, c'est-à-dire des quotités d'unités pouvant se disposer en polygones réguliers. Chaque nombre polygone d'une certaine espèce (de n côtés par exemple) est la somme de p nombres entiers commençant à l'unité et en progression arithmétique suivant la raison $n-2$; et le nombre p est dit côté de ce polygone. Or le *liber Epaphroditii et Vitruvii Rustici* donne pour les nombres polygones, du triangle au dodécagone, les formules exactes pour calculer le nombre en se donnant le côté, et inversement. Mais ces formules y sont regardées comme exprimant l'aire des polygones réguliers, en sorte que le triangle équilatéral de côté p se calculerait par la formule non homogène $\frac{p(n+1)}{2}$! Ce fut, au x^e siècle, l'occasion d'un échange de lettres entre Gerbert et Adelbold, et l'erreur, en conséquence, fut écartée pour le triangle. Mais elle subsista pour le pentagone, etc., et se retrouve encore dans la *Margarita philosophica*.

En tous cas, ce n'est point Héron, postérieur aux plus anciens d'entre eux, que les agrimenseurs ont copié. Sans doute ils auraient pu utiliser les sources grecques antérieures dont Héron a lui-même disposé (on en a retrouvé quelques fragments¹); mais bien rares paraissent ceux qui étaient capables de le faire. Leurs maigres connaissances semblent surtout dériver du polygraphe Varron, qui pour les Romains fut, sur tous les domaines, le vulgarisateur par excellence de la science alexandrine.

1. *The papyrus Ayer a mathematical fragment* (Americ. Journ. of Philology, XIX, 1895, p. 25-39).

III.

Deux autres points de la thèse de M. Cantor, relatifs à la transmission des connaissances géométriques de l'antiquité au moyen âge, avaient, dès auparavant, soulevé de vives controverses. Tandis que la « question héronienne » s'agitait seulement dans le cercle tracé par Th.-H. Martin, aucune limitation pareille n'existait ni pour la « question de Boèce », ni pour la « question de Gerbert ». La première était posée depuis que dans son célèbre *Aperçu historique* de 1837, Michel Chasles, restituant, d'après les manuscrits de la *Géométrie de Boèce*, au lieu de la table dite de Pythagore que donnaient les éditions, la figure de l'abacus latin et celle des *apices*, avait montré dans ces derniers une forme primitive de nos chiffres modernes, expliqué l'emploi de ces *apices* sur l'abacus, et fait remonter, d'après le texte de Boèce, leur invention aux pythagoriciens. L'opinion courante, qui attribuait l'origine immédiate de nos chiffres aux Arabes et qui, au delà de ceux-ci, ne remontait qu'aux Indous, avait trop d'arguments à opposer pour se laisser ainsi ruiner d'un seul coup. Il lui suffisait de mettre en doute l'authenticité du passage concernant l'abacus dans la *Géométrie de Boèce*, tandis que les partisans de l'opinion de Chasles avaient à la mitiger et à la transformer pour établir un lien entre les Indous et les pythagoriciens. Une singulière érudition, une rare ingéniosité furent dépensées de part et d'autre dans cette polémique, que je n'ai pas besoin de rappeler plus longuement, avant que la question ne se précisât par l'étude des manuscrits et la détermination de l'âge des plus anciens.

Dans l'introduction que j'ai composée pour la *Correspondance d'écolâtres du XI^e siècle*¹, publiée en 1900 par M. l'abbé Clervat et moi, j'ai exposé brièvement l'état actuel de la question, tant d'après les résultats acquis par d'autres que d'après mes recherches personnelles. Mon manuscrit était à l'impression lorsque parut le volume *Gerberti Opera mathematica* (Berlin, Friedländer, 1899), publié par M. Nicolas Bubnov, de Kiev, volume qui, par l'abon-

1. *Notices et Extraits des mss.* XXXVI. — Voir aussi, dans la *Bibliotheca mathematica* de 1900, mon article : *Notes sur la Pseudo-Géométrie de Boèce* (pp. 39 et suiv.), qui contient quelques critiques de détail sur le volume de M. Bubnov cité un peu plus loin.

dance des renseignements qu'il contient sur les manuscrits mathématiques du haut moyen âge, par l'importance des textes et des notes critiques qu'il contient, est désormais aussi indispensable aux travailleurs qui s'occupent de cette époque, qu'il restera dépourvu d'autorité pour tout ce qu'il renferme de conjectural. En tous cas, pour Boèce, M. Bubnov a accompli un travail de dépouillement et de comparaison qui est définitif, et sans que je connusse son travail, il était arrivé avant moi aux mêmes conclusions d'ensemble.

Il existe en réalité deux *Géométries* attribuées à Boèce dans les manuscrits : de la plus ancienne, divisée en cinq livres, il y a un *codex* (le *Parisinus* lat. 13,020) qui remonte au commencement du ix^e siècle. Elle renferme : une traduction des énoncés des quatre premiers livres d'Euclide ; des fragments d'une sorte de catéchisme arithmético-géométrique ; d'autres d'un dialogue de même nature, l'*Altercatio duorum geometricorum de figuris, numeris et mensuris* (partie restée inédite) ; un fatras d'extraits dans le plus grand désordre (troisième livre de la *Géométrie*, dans l'édition de Bâle, 1570), tirés de Cassiodore, des *gromatici* (mais non mathématiques), de l'arithmétique authentique de Boèce. Personne ne peut songer à voir, dans cet « horrible mélange », une œuvre de l'auteur indiqué par le titre. Deux questions intéressantes restent à résoudre (car celle de la formation d'un tel monstre est plutôt fastidieuse) : Quels sont, sinon l'auteur, au moins l'âge et le lieu de rédaction de l'*Altercatio*, débris qui méritent d'être étudiés ? La traduction d'Euclide, qui, cela est prouvé, était primitivement accompagnée de démonstrations, remonte-t-elle jusqu'à Boèce ou est-elle postérieure ? Sur ce dernier point, M. Bubnov soutient la première affirmative, que combat le savant éditeur d'Euclide, Heiberg. Mais la question se trouve liée à celle de l'authenticité d'un passage de Cassiodore, qui contient la même version pour quelques énoncés des définitions. Cette authenticité n'est pas jusqu'à présent suffisamment établie, et réclame une étude spéciale des manuscrits de Cassiodore.

La plus récente des deux *Géométries* attribuées à Boèce, celle sur laquelle s'est concentré le débat, ne se trouve que dans des manuscrits au plus tôt de la fin du xi^e siècle. Divisée en deux livres seulement, elle renferme, outre la traduction des énoncés d'Euclide, dérivée d'un exemplaire de la première *Géométrie*, mais

remaniée, les passages relatifs à l'abacus, et une compilation systématique, entachée de fautes singulières, et tirée des problèmes métriques des agrimensseurs. Cette fois, l'attribution à Boèce ne peut être mise au compte d'un copiste inintelligent; elle résulte du texte même du préambule. Or Friedlein et Weissenborn n'ont pas épuisé tous les arguments intrinsèques contre l'authenticité de l'ouvrage, et cependant il est inutile d'en chercher d'autres que les leurs. D'autre part, M. Bubnov n'a rien laissé à faire (à part peut-être quelques détails insignifiants) touchant la question des sources diverses où le faussaire a puisé. Il ne reste donc à résoudre qu'une objection, que me répétait M. Cantor il y a six mois : Comment se fait-il qu'un pareil faux ait été commis, à une époque où il semble n'avoir eu aucun intérêt et où il serait difficile de trouver un cas du même genre ? D'ailleurs, en bonne règle, pour les athétèses, il ne suffit point d'accumuler les preuves qui militent contre l'authenticité ; il faut retrouver le véritable auteur, ou au moins déterminer l'âge où il a vécu, le pays qu'il habitait, le milieu dont il subissait les influences. Sur ces derniers points, la « question de Boèce » n'est pas close.

IV.

Celle de Gerbert s'étend à toute son œuvre mathématique, et pour la traiter dans son ensemble, il convient sans doute d'attendre le nouveau volume annoncé par M. Bubnov. Mais ce qui concerne la *Géométrie* peut être précisé dès maintenant. Ici il ne s'agit certainement pas d'un faux ; on est en présence de la réunion accidentelle sous un même nom de trois parties distinctes et généralement anonymes de fait dans les manuscrits. Le premier doute sur l'authenticité a été émis par Olleris, lorsqu'il réédita l'ouvrage après Bernhard Pez ; elle a été surtout déniée pour l'ensemble par Friedlein et Weissenborn, avant M. Bubnov. Mais les conclusions ont été divergentes en ce qui concerne chaque partie en particulier.

La première partie est incontestablement une œuvre originale destinée à l'enseignement, mais incomplète. L'auteur ne sait pour ainsi dire rien en géométrie, à part la propriété du triangle 3, 4, 5 qu'il appelle pythagorique ; mais c'est un esprit clair et métho-

dique. M. Bubnov la reconnaît expressément comme de Gerbert ; je crois au contraire avoir démontré, dans ma *Correspondance d'écolâtres*, qu'elle n'a pu être écrite que dans le second quart du XI^e siècle (après cette Correspondance et avant Francon de Liège).

La seconde partie est une compilation de procédés d'arpentage, avec indication des opérations à effectuer et des instruments ou appareils à employer sur le terrain pour déterminer indirectement les hauteurs ou longueurs. C'est la seule partie que Friedlein soit disposé à attribuer à Gerbert ; M. Bubnov suppose qu'avec la troisième partie, elle figurait dès avant Gerbert dans un ouvrage anonyme dont la moitié serait perdue. Weissenborn soutient que les deux parties sont séparées et postérieures à Gerbert, ce qui est aussi mon opinion. Toutefois l'origine de cette compilation reste inconnue, car les sources grecques ou romaines ne nous fournissent que de rares problèmes qu'on en puisse rapprocher ; en tout cas, il importe d'y constater l'apparition de l'astrolabe, certainement venu d'Espagne et emprunté aux Arabes. Cet instrument construit par les Grecs pour observer les hauteurs du soleil ou des étoiles et déterminer ensuite, par un ingénieux procédé mécanique, l'heure du jour ou de la nuit, a subi, en Orient, une petite complication qui en fait un instrument universel et permet de l'employer en arpentage, pour mesurer, non pas les angles, mais en fait leurs tangentes ou leurs cotangentes (ombres verses ou droites des Arabes). L'astrolabe se tenant d'ailleurs à la main et en assurant une direction avec le fil à plomb, on ne peut opérer que sur des angles situés dans un plan vertical et dont un côté soit vertical ou horizontal. Pour les longueurs, de la station de l'opérateur au point inaccessible visé, on prendra donc comme troisième terme de la proportion à établir (celui qui donnera la longueur cherchée en le multipliant par le rapport exprimant la tangente trigonométrique), on prendra, dis-je, la hauteur de l'œil au-dessus du sol. C'est ce procédé, dont il est inutile de faire ressortir l'imperfection, qui sera la pratique dominante de l'arpentage au moyen âge. Aucun indice ne nous conduit à supposer qu'il ait été employé par les anciens Grecs ou par les Romains.

Enfin la troisième partie de la Géométrie dite de Gerbert est également une compilation ; mais l'origine en est évidente ; ce sont des calculs numériques tirés des agrimensseurs romains, de même

que la partie correspondante de la Géométrie en deux livres du Pseudo-Boèce. On retrouve dans l'un et l'autre de ces deux ouvrages les fausses mesures des polygones réguliers et, en outre, des fautes communes qui font penser que l'auteur du second a pu utiliser la compilation antérieure. Cette dernière comprend en outre divers extraits d'auteurs latins : c'est comme un recueil de notes qui s'est peut-être formé par alluvions successives autour d'un noyau primitif. Celui-ci a été constitué par ou pour Gerbert, et envoyé par lui, avant d'être mis au point, à son ami Adelbold, comme *Figuræ geometricæ*. C'est là la circonstance qui, à mon avis, a pu faire attacher le nom de Gerbert à cette compilation et, par suite, à l'ensemble de la Géométrie qu'on lui attribue.

V.

Dans la *Correspondance d'écolâtres* que j'ai déjà mentionnée, je me suis efforcé de montrer quel était, vers 1025, l'état de profonde ignorance où se trouvaient, par rapport à la Géométrie, nos ancêtres de l'Occident latin. Tandis que les deux maîtres, Raginbold de Cologne et Radolf de Liège, qui échangent des lettres destinées à la publicité dans le milieu où ils vivent, se tirent convenablement de calculs relativement compliqués, ils en sont à se demander, sur la proposition d'Euclide, « la somme des angles intérieurs d'un triangle est égale à deux droits », quel est le sens du mot intérieur, et l'opinion qui semble l'emporter est que « intérieur » signifie « aigu » et qu'« extérieur » signifie « obtus ». Les énoncés d'Euclide, seuls conservés, sont donc tout à fait intelligibles pour eux. Quoiqu'ils sachent raisonner, ils n'ont aucune idée de ce que peut être une démonstration géométrique ; ils n'en ont aucun modèle et ne visent nullement à en constituer un.

Nous sommes ainsi en présence d'un état absolument préscientifique, comme celui des Grecs avant Pythagore. Cependant en Lotharingie, au XI^e siècle, on mesurait certainement des champs et on construisait des églises. Mais l'enseignement de la Géométrie n'avait nullement, comme on le croit à tort, été renouvelé par Gerbert. Même dans les écoles renommées comme les plus savantes, on ne pouvait donner que les notions les plus élémentaires, celles qui sont absolument intuitives, en les formulant suivant les défi-

ditions transmises par les grammairiens et en y joignant les procédés de métrique transmis par la tradition.

Les géomètres de l'antiquité apparaissent comme de très subtils philosophes qui ont énoncé sur les propriétés des figures et sur leur mesure des propositions nombreuses que l'expérience vérifie, mais qu'ils ont dû trouver par l'expérience, soigneusement conduite, encore plus que par la sagacité de leur esprit. La Géométrie est donc conçue comme une connaissance expérimentale et, comme telle, elle n'entraîne pas la notion d'une rigueur absolue. On ne fait aucune difficulté à l'emploi, pour le calcul de la diagonale d'un carré, de deux formules qui ne concordent pas arithmétiquement ($\frac{7}{5}$ et $\frac{12}{7}$ du côté), pas plus qu'elles ne satisfont rigoureusement à la condition connue que le carré de la diagonale doit être double du carré du côté.

Vers 1050, Francon de Liège écrivit six livres sur la quadrature du cercle. Le problème qu'il se pose n'est nullement celui que nous entendons sous ce titre. Francon admet comme vraie la formule d'Archimède ; il sait donc construire un rectangle équivalent à un cercle ; il s'agit maintenant de construire un carré équivalent à ce rectangle ; voilà le sujet qu'il traite et qu'il n'arrive point à dominer. Ajoutons qu'il ignore toujours le théorème fondamental de Pythagore, dont la connaissance ne se répandit que par les applications numériques qui en sont faites dans les Géométries de Gerbert et du Pseudo-Boèce.

Comment nos ancêtres s'élevèrent-ils successivement d'un niveau de connaissances aussi inférieur à l'intelligence de la science grecque ? Si l'on se borne à considérer la géométrie théorique, on peut déterminer la date où les versions d'Adelhard de Bath et de Campanus permirent de connaître les *Éléments* d'Euclide. Mais à part quelques génies exceptionnels, comme au début du XIII^e siècle Léonard de Pise ou Jordamus Nemorarius, dont l'influence se fit d'autant moins sentir qu'ils devançaient davantage les hommes de leur temps, on ne voit point que ces révélations aient produit une révolution aussi marquée que, par exemple, pour le calcul l'introduction de l'algorithme (chiffres arabes). Dans la première moitié du XV^e siècle, un homme aussi supérieur que le fut Nicolas de Cusa est encore incapable de mettre régulièrement sur ses pieds un raisonnement géométrique. L'initiation fut donc relativement très lente ; d'ailleurs, ce que l'on sait des programmes

des Universités du moyen âge prouve bien qu'Euclide n'y fut jamais enseigné régulièrement et représentait un degré de connaissances considéré alors comme tout à fait supérieur, quelque chose comme est, pour nos bacheliers, la géométrie projective de Cayley.

Qu'apprenait-on donc, en fait de Géométrie, dans les Universités du moyen âge ? Ce sera la gloire de Maximilien Curtze (de Thorn), de nous l'avoir révélé au prix des recherches les plus minutieuses et les plus patientes. En attendant qu'il nous donne l'Histoire de la Géométrie pratique dont il réunit les matériaux, nous pouvons, grâce aux communications et publications partielles qu'il a déjà faites, esquisser à grands traits les principaux résultats qu'elle mettra en pleine lumière.

On sait que les Facultés des arts, dès le commencement de l'enseignement universitaire, se consacraient à l'enseignement, d'une part, du *trivium* littéraire (grammaire, rhétorique, dialectique), de l'autre, du *quadrivium* scientifique (arithmétique, géométrie, astronomie, musique), dont la constitution remonte à l'école de Pythagore, et qui, triomphant définitivement sous les Romains des classifications stoïciennes ou autres, avait été transmis au moyen âge par la tradition des grammairiens. Mais c'est par une erreur, assez naturelle d'ailleurs, que l'on était porté à considérer cet enseignement comme théorique. En réalité, il était pratique, et, comme niveau, atteignait à peine celui de notre enseignement primaire.

Pour l'arithmétique et la musique, on possédait deux ouvrages authentiques de Boèce, qui représentaient le *summum* des connaissances théoriques ; ce que les étudiants apprenaient, c'était le calcul (*abacus* ou *algorithmus*), d'après divers manuels copiés les uns sur les autres, et le chant, d'après d'autres manuels dérivant de Gui d'Arezzo, etc. L'astronomie, réduite à des notions de calendrier et de cosmographie, était cependant peut-être un peu mieux partagée du côté théorique, grâce à l'attrait de l'astrologie ; on avait, au moins depuis le *xiii^e* siècle, la *Sphère* de Sacrobosco, encore classique au *xvi^e*. Quant à la géométrie, M. Curtze a déterminé les ouvrages qui, composés pour l'enseignement dans des Universités, ont eu, à partir du *xi^e* siècle, le plus de succès, et répondaient le mieux, par suite, aux besoins de leurs époques successives. Ces ouvrages, complètement oubliés il y a dix ans, sont au nombre de trois.

VI.

C'est d'abord, vers le milieu du ^{xiii}e siècle ou un peu après, une *Practica geometriæ*, publiée par Curtze comme anonyme. J'ai reconnu depuis que, dans un manuscrit de Cambridge, elle porte le titre : *Practica Hugonis*, et que, d'un autre côté, elle figure, sans doute à tort, mais en tout cas avec un texte plus étendu, dans des recueils manuscrits des œuvres du célèbre théologien Hugues de Saint-Victor. Quoi qu'il en soit, on peut la considérer comme écrite en France pour l'Université de Paris.

L'intérêt de cette *Practica Hugonis* est qu'elle représente le développement normal de l'esprit géométrique avant l'introduction de la science arabe. L'auteur a voulu rendre compte des procédés d'arpentage usités en les classant méthodiquement et en les ramenant au principe de similitude. Les démonstrations n'ont point le caractère que nous exigeons actuellement ; mais, en les prenant pour ce qu'elles sont, des explications claires et intuitives, elles sont satisfaisantes.

La Géométrie pratique, distinguée de la Géométrie théorique, dont l'existence et le caractère scientifique sont déjà au moins reconnus, est divisée en trois parties : l'*altimetria*, la *planimetria* et la *cosmimetria*. A la mesure des hauteurs, à celle des surfaces planes (horizontales), est ainsi opposée la mesure des dimensions de la terre et du ciel (d'après des hypothèses plus ou moins fantastiques empruntées à Macrobe, mais dont notre auteur est au moins capable de faire ressortir l'incohérence). A la *cosmimétrie* se rattachent les formules métriques pour le cercle et la sphère, admises sans démonstration d'après la tradition.

Au ^{xiii}e siècle, en 1274, apparaît le *Quadrans* de *Robertus Anglicus*, maître ès arts à Montpellier. Pour la publication de ce traité¹, une circonstance accidentelle m'a fait devancer M. Curtze, qui, sans même me faire connaître le projet qu'il en avait conçu, m'a généreusement indiqué les manuscrits dont il avait constaté l'existence.

Le quadrant (quart de cercle) est un instrument arabe ayant pour objet de remplacer l'astrolabe, notamment pour la déter-

1. *Notices et Extraits des mss.* XXXV, 1897.

mination de l'heure, et c'est ainsi que son nom est passé aux cadrans solaires, puis aux cadrans de nos horloges mécaniques et de nos montres. Comme l'astrolabe des Arabes, il comporte un carré servant à mesurer les ombres versées ou droites (tangentes des angles de visée, soumis aux mêmes conditions, l'instrument se tenant à la main et étant muni d'un fil à plomb).

Maître Robert répète, après Hugues, la distinction de la Géométrie théorique et de la Géométrie pratique ; mais dans la subdivision de celle-ci, à la *cosmimétrie* il substitue la *stéréométrie*. Après une description très claire du quadrant et l'indication de ses usages astronomiques, il passe à son emploi en arpentage, en ajoutant la description des procédés avec la perche et avec le miroir. Il termine par les formules métriques pour les surfaces et les solides (avec la fausse formule pour le pentagone) ; le tout sans démonstrations ni exemples numériques, mais clair et bien pratique.

Le xiv^e siècle voit enfin surgir une nouvelle *Pratique de Géométrie*, écrite à Paris en 1249 par Maître Dominique de Clavasio (Chivasso en Piémont), plus tard astrologue du roi. Son ouvrage, encore inédit¹, est conçu sur un tout autre plan que le précédent. Maître Dominique s'est assimilé Euclide et il s'est proposé de donner, pour toutes les pratiques de l'arpentage, des démonstrations rigoureuses. Avec lui, l'art de la Géométrie, tel qu'il est enseigné dans les Universités, est définitivement relevé à la dignité d'une science, et s'il y a encore des manuels élémentaires, au moins ne peuvent-ils plus valoir que comme des abrégés d'une théorie complète, non plus comme des recueils de procédés pratiques subsistants par eux-mêmes.

Mais on a pu constater que les étapes successives de la Géométrie pratique, pendant toute cette période du moyen âge, ont été parcourues non pas par des professionnels proprement dits, mais bien par des membres du corps enseignant. Ceux-ci ont d'ailleurs rempli le rôle qu'on pouvait leur demander sans avoir réalisé aucun progrès véritable au point de vue des procédés, pas plus qu'ils n'ont eu à enregistrer aucune invention nouvelle. L'arpentage apparaît comme une simple routine, sans vie propre ; il ne pose point de nouveaux problèmes à la science, et il n'en tire pas de nouvelles lumières.

1. M. Curtze m'a communiqué sa copie préparée pour l'impression. J'en poursuis la collation sur le manuscrit le plus ancien, qui se trouve à la Bibliothèque nationale.

Il ne sera renouvelé qu'aux environs de l'an 1600 par l'introduction de la mesure des angles sur le terrain et l'emploi des calculs trigonométriques, imités de ceux des Grecs et des Arabes en astronomie. C'est dans les Pays-Bas que sera réalisé ce progrès, marqué par la première triangulation opérée par Snellius. Dans ce pays se forme au xvi^e siècle et fleurit pendant le xvii^e une forte école d'arpenteurs, qui sont de vrais géomètres et aux disputes desquels Descartes ne dédaignera pas de prendre part. Mais c'est la seule période où la vitalité scientifique apparaît véritablement dans cette classe sociale et il convient de remarquer que ces arpenteurs hollandais se rattachent par des liens immédiats à l'école des ingénieurs civils et militaires qu'illustrent les noms de Simon Stevin et d'Albert Girard.

Or, nous n'avons pas de traces jusqu'à présent d'un rôle scientifique des architectes ou des ingénieurs pendant le moyen âge. Le fait ne laisse pas que d'être singulier en présence de l'épanouissement à cette époque d'une architecture absolument originale et dont la complexité de forme et d'ornementation exigeait des épures et des dessins beaucoup plus variés que les types de l'architecture antique. Mais à part l'idée des polygones étoilés, qui apparaît au xiii^e siècle, ce n'est qu'en pleine Renaissance et dans les écrits d'hommes dont le nom est surtout grand dans l'histoire de l'art, Léonard de Vinci et Albert Dürer, que l'on retrouve des tracés graphiques qui semblent provenir de cette tradition. On est donc en face d'une lacune que de nouvelles recherches permettront peut-être de combler en partie, mais on ne peut guère espérer voir ces recherches aboutir à la mise en lumière d'une influence, comparable à celle que l'on peut observer dans l'antiquité hellène, des besoins de la pratique du constructeur sur le développement de la science théorique.

PAUL TANNERY.